ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 22 | April 1942 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über die unter einem Damm durch eine horizontale Parallelschicht sickernde Wassermenge und die Auftriebsdruckverteilung an der Dammbasis.

Von *H. Roßbach* in Karlsruhe.

Das ebene stationäre Problem der Grundwasserbewegung unter einem Damm mit Spundwand auf einer horizontalen homogenen Parallelschicht wird exakt gelöst. Die Formel für die unter dem Damm sekundlich versickernde Wassermenge wird für verschiedene Verhältnisse der Dammbreite, Spundwandlänge und Schichtdicke ausgewertet und in einem Diagramm dargestellt.

Einleitende Bemerkungen. In einer Arbeit behandelt T. Kano[1]) folgendes Grundwasserströmungsproblem: Auf einer homogenen, durchlässigen Parallelschicht von der Breite b ist ein Damm aufgesetzt. Die Pegelhöhen des aufgestauten Oberwassers und des Unterwassers sind H_1 und H_2 ($H_1 - H_2 = h$). Es wird angenommen, daß die Pegelhöhen konstant gehalten werden, und daß der Damm senkrecht zu seinem Querschnitt sehr lang ist; dann kann der Strömungsvorgang als ebenes stationäres Problem behandelt werden. Für einen Damm (Basisbreite $2a$) mit einer und ohne eine senkrechte Spundwand (Länge m) in der Mitte der Dammbasis leitet T. Kano Formeln für die Berechnung der unter dem Damm durch die Sickerschicht sekundlich durchsickernden Wassermenge und der Auftriebsdruckverteilung an der Dammbasis ab. Ihrer Herleitung nach handelt es sich um Näherungsformeln, die ihre Brauchbarkeit verlieren, wenn das Verhältnis der Dammbasisbreite ($2a$) und der Spundwandlänge (m) zur Schichtbreite (b) nicht hinreichend klein ist. Für das vorliegende Problem lassen sich jedoch strenge Lösungen angeben, die bei numerischen Rechnungen an Handlichkeit den Kanoschen Formeln nicht nachstehen; außerdem können sie auch verwendet werden, um den Gültigkeitsbereich der Kanoschen Formeln abzugrenzen. Die Lösung für den Damm ohne Spundwand ($m = 0$) (Bild 1b) und außerdem auch die Lösung für eine Spundwand allein ($a = 0$) (Bild 1c) ergeben sich als Spezialfälle der Lösung für den Damm mit Spund-

[1]) Kano, Tokutaro: The Quantity of Water Percolating under a Dam, and the Distribution of Uplift Pressure on it, considering the Depth of the Impervious Stratum., Jap. Journ. Astr. Geoph. Bd. 17 (1939), S. 173 bis 184.

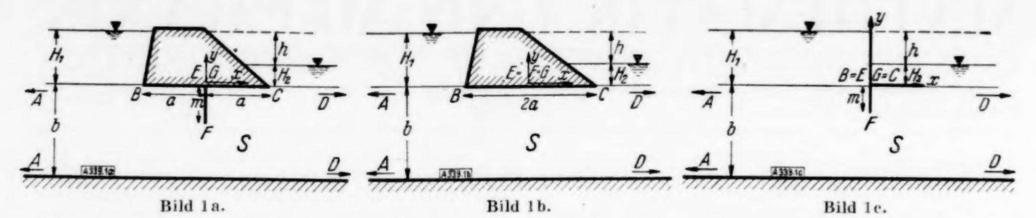


Bild 1a. Bild 1b. Bild 1c.

wand (Bild 1a). Das durch numerische Auswertung der Lösung gewonnene Diagramm (Bild 7) gestattet, die durch die Schicht sickernde Wassermenge für beliebige a, b, m und h zu ermitteln. Mit unwesentlichen Abweichungen werden in der vorliegenden Arbeit die von Kano verwendeten Bezeichnungen benutzt.

Bezeichnungen.

Es bedeuten:

x, y die Koordinaten eines Punktes des Strömungsbereiches S (Bild 1a, b, c);
$z=x+iy$ eine komplexe Veränderliche;
u, v die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\bar{v}$ der Strömung;
$\omega=u-iv$ die komplexe Geschwindigkeitsfunktion der Strömung;
$\varphi(x,y)$ das Geschwindigkeitspotential der Strömung;
$\psi(x,y)$ die Stromfunktion, die längs Stromlinien konstante Werte annimmt;
$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ die komplexe Potentialfunktion der Strömung;
p den hydrodynamischen Druck;
g die in Richtung der negativen y-Achse wirkende Erdbeschleunigung;
ϱ die Dichte des Wassers;
ν die für das homogen vorausgesetzte Erdreich konstante Widerstandszahl;
$K=\frac{g}{\nu}$ den Durchlässigkeitskoeffizienten;
$\varrho\nu\bar{v}$ die pro Volumeneinheit vom Erdreich auf die Flüssigkeit ausgeübte Widerstandskraft;
Q die zwischen zwei Querschnitten im Abstand der Längeneinheit durch den Strömungsbereich sickernde Wassermenge.

Die Differentialgleichungen. Unter der Annahme, daß die Flüssigkeit inkompressibel ist, und daß die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen derart klein sind, daß Glieder höherer Ordnung in ihnen vernachlässigt werden können, gelten für den ebenen, stationären Strömungsvorgang die Differentialgleichungen

$$\varrho\nu\bar{v}=-\operatorname{grad}(p+\varrho g y) \quad \text{(1a)},$$

$$\operatorname{div}\bar{v}=0 \quad \text{(1b)}.$$

Aus (1a) folgt, daß $\bar{v}$ als Gradient einer skalaren Ortsfunktion $\varphi(x,y)$ dargestellt werden kann, die nach (1b) der Potentialgleichung

$$\Delta\varphi=0$$

genügt. (1b) kann durch den Ansatz

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

befriedigt werden. Wegen

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ist $\varphi+i\psi=f(z)$ eine analytische Funktion, und es gilt

$$\omega=u-iv=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}.$$

Die Lösung des Strömungsproblemes erfordert die Bestimmung einer im Bereich S analytischen Funktion $f(z)$, die gewissen durch die hydrodynamischen und geometrischen Daten vorgeschriebenen Randbedingungen genügen muß.

Durch Integration von (1a) erhält man

$$\varphi+\frac{p}{\varrho\nu}+\frac{g}{\nu}y=C \quad \text{(2)}.$$

C ist eine absolute Integrationskonstante. (2) dient zur Bestimmung des Druckes.

Die Randbedingungen. Längs AB und CD ist der Druck p gleich dem statischen Druck des anstehenden Wassers. Wegen $y=0$ ergibt sich aus (2):

$$\text{längs } AB \qquad \varphi_{AB} = C - \frac{g}{\nu} H_1,$$

$$\text{längs } CD \qquad \varphi_{CD} = C - \frac{g}{\nu} H_2.$$

Da φ nur bis auf eine belanglose, additive Konstante bestimmt ist, kann in einem Punkte oder auf einer Äquipotentiallinie willkürlich über φ verfügt werden.

Wir setzen daher

$$\varphi_{AB} = -\frac{g}{2\nu}(H_1 - H_2) = -\frac{g}{\nu}\frac{h}{2},$$

dann wird C

$$C = \frac{g}{\nu} H_1 - \frac{g}{\nu}\frac{h}{2}$$

und

$$\varphi_{CD} = +\frac{g}{\nu}\frac{h}{2}.$$

Die Dammbasis und Spundwand $BEFGC$ und die Grenze AD der undurchlässigen Schicht sind Stromlinien. Auf Stromlinien nimmt ψ konstante Werte an.

Die Differenz $\psi_{BC} - \psi_{AD}$ gibt die zwischen $BEFGC$ und AD durch den Bereich sickernde Wassermenge Q an. Da auch ψ nur bis auf eine belanglose, additive Konstante bestimmt ist, kann in einem Punkte oder auf einer Stromlinie willkürlich über ψ verfügt werden. Wir setzen

$$\psi_{AD} = 0$$

und erhalten

$$\psi_{BC} = Q.$$

Daraus folgt, daß dem Strömungsbereich S in der φ, ψ-Ebene der Bereich S' (Bild 2) entspricht. Wegen der Symmetrie des Strömungsbereiches zur y-Achse liegt F' auf der ψ-Achse, E' und G' liegen auf der Geraden $\psi = Q$ symmetrisch zur ψ-Achse. Die Größe Q und die Lage der Bildpunkte D' und F' sind zunächst unbekannt, sie sind bei der Lösung der Aufgabe mitzubestimmen.

Die Bestimmung der komplexen Potentialfunktion. Die Lösung des Problems verlangt die Bestimmung der komplexen Potentialfunktion $f(z)$ aus den angegebenen Randbedingungen; das heißt $f(z)$ ist diejenige analytische Funktion, die den Bereich S unter Berücksichtigung der Ränderzuordnungsvorschrift auf den Bereich S' konform abbildet. Im vorliegenden Falle läßt sich diese Aufgabe in mehreren Schritten leicht lösen.

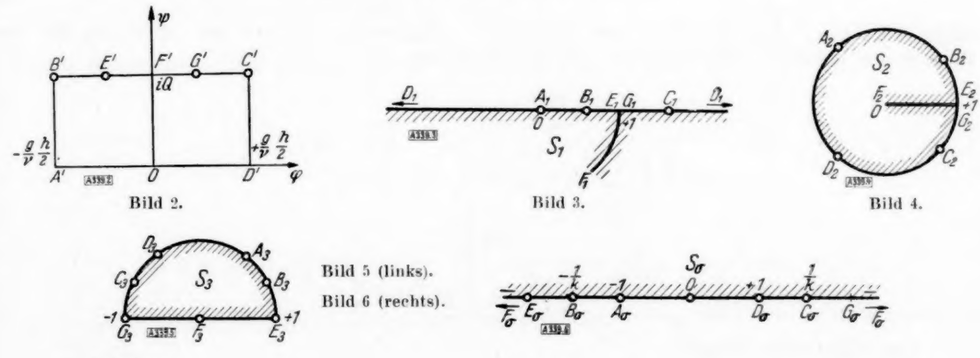


Bild 2. Bild 3. Bild 4.

Bild 5 (links). Bild 6 (rechts).

1. Schritt:

$$z_1 = e^{\zeta} \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{z\pi}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bildet den Bereich S auf den Bereich S_1 (Bild 3) ab.

Den Punkten A, B, C, D, E, F und G ordnet sie die Punkte

$$z_{1A} = 0, \quad z_{1B} = e^{-a}\left(a = \frac{a\pi}{b}\right), \quad z_{1E} = 1, \quad z_{1F} = e^{-i\mu}\left(\mu = \frac{m}{b}\pi\right),$$

$$z_{1G} = 1, \quad z_{1C} = e^{a}, \quad z_{1D} = \infty \quad \text{zu.}$$

2. Schritt:

$$z_2 = \frac{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2}}{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

bildet S auf S_2 (Bild 4) ab. Man hat

$$z_{2A} = -e^{-i\mu}, \quad z_{2B} = \frac{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{a}{2}}{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{a}{2}}, \quad z_{2E} = 1, \quad z_{2F} = 0, \quad z_{2G} = 1,$$

$$z_{2C} = \frac{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{a}{2}}{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{a}{2}}, \quad z_{2D} = -e^{i\mu}.$$

3. Schritt:

$$z_3 = \sqrt{\frac{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2}}{i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

bildet S auf S_3 (Bild 5) ab. Die Abbildung liefert derjenige Zweig der Funktion, dessen Imaginärteil für alle z aus S größer oder gleich Null ist. Man hat

$$z_{3A} = i e^{-\frac{\mu}{2} i}, \quad z_{3B} = i \frac{\mathfrak{Tg}\frac{a}{2} - i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Tg}^2\frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}}, \quad z_{3E} = 1, \quad z_{3F} = 0, \quad z_{3G} = -1,$$

$$z_{3C} = i \frac{\mathfrak{Tg}\frac{a}{2} + i \operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Tg}^2\frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}}, \quad z_{3D} = i e^{i\frac{\mu}{2}}.$$

4. Schritt:

$$\sigma = \frac{\mathfrak{Ctg}\frac{\zeta}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{1 + \mathfrak{Cotg}^2\frac{\zeta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

bildet schließlich den Bereich S auf die obere σ-Halbebene (Bild 6) ab. In (6) ist für die Wurzel das positive Vorzeichen zu wählen. Man hat

$$\sigma_A = -1, \quad \sigma_B = \frac{-\mathfrak{Ctg}\frac{a}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{1 + \mathfrak{Ctg}^2\frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}} = -\frac{1}{k}, \quad \sigma_E = -\frac{1}{\sin\frac{\mu}{2}}, \quad \sigma_F = \infty,$$

$$\sigma_G = +\frac{1}{\sin\frac{\mu}{2}}, \quad \sigma_C = \frac{\mathfrak{Ctg}\frac{a}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{1 + \mathfrak{Ctg}^2\frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}} = \frac{1}{k}, \quad \sigma_D = +1.$$

Das elliptische Integral

$$\varphi + i\psi = C\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma-1)(\sigma+1)\left(\sigma-\frac{1}{k}\right)\left(\sigma+\frac{1}{k}\right)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

bildet die obere σ-Halbebene auf ein Rechteck der φ, ψ-Ebene ab. Da reellem $\sigma\,(0 \leq \sigma \leq 1)$ $0 \leq \varphi \leq \frac{g}{2\nu}h$, $\psi = 0$ entspricht, muß die Konstante C negativ reell gewählt werden.

Setzt man $C = -\frac{c}{k^2}$ (c positiv reell), so erhält man

$$\varphi + i\psi = c\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}.$$

Da dem Punkte $D\,(\sigma_D = 1)$ $\varphi = \frac{g}{2\nu}h$, $\psi = 0$ entspricht, erhält man

$$\frac{g}{2\nu}h = c\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} = c\,K(k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{a})$$

und daraus

$$c = \frac{g}{\nu}\,\frac{h}{2\,K(k)}.$$

($K(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung.) Für $k = \frac{1}{\sigma_c}$ erhält man nach leichter Umformung:

$$k = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{a}{2}}}.$$

Für die komplexe Potentialfunktion erhält man somit:

$$\varphi + i\psi = \frac{g}{\nu}\,\frac{h}{2\,K(k)}\int_0^{\frac{\mathfrak{Cotg}\frac{\zeta}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{1+\mathfrak{Ctg}^2\frac{\zeta}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\mu}{2}}}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Da dem Punkte $C\left(\sigma_C = \frac{1}{k}\right)$ $\varphi = \frac{g}{2\nu}h$, $\psi = Q$ entspricht, ergibt sich aus (8)

$$\frac{g}{2\nu}h + i\,Q = \frac{g}{\nu}\,\frac{h}{2\,K(k)}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}$$

$$= \frac{g}{2\nu}\,\frac{h}{K(k)}\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} + \frac{g}{2\nu}\,\frac{h}{K(k)}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}.$$

Nun ist

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} = i\,K(k') \quad \text{mit} \quad k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\cos\frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{a}{2}}.$$

Damit erhält man für die Wassermenge Q

$$Q = \frac{g}{\nu}h\,\frac{K\left(\dfrac{\cos\frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{a}{2}}\right)}{K\left(\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{a}{2}}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

An der Dammbasis und den Spundwandseiten hat man $|\sigma| \geq \frac{1}{k}$ und $\psi = Q$, daher wird hier

$$\varphi + i\,Q = \frac{g}{\nu}h\,\frac{1}{2\,K(k)}\left\{\int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} + \int_{\infty}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}\right\}.$$

Wegen

$$\int_0^1 = -\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \quad \text{und} \quad \int_1^{\frac{1}{k}} = i\,K(k')$$

erhält man

$$\varphi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{\infty}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}.$$

Im Punkte $F(\sigma = \infty)$ hat man $\varphi = 0$. Setzt man $\sigma = \frac{1}{k s}$, so erhält man

$$s = \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2} \sqrt{\frac{1 + \mathfrak{Cotg}^2 \frac{\zeta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Tg}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2}}}$$

und

$$\varphi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}.$$

Längs FG hat man

$$\varphi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{0}^{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{y\pi}{2b}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2} + \mathfrak{Tg}^2 \frac{a}{2}}}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}.$$

Längs GC hat man

$$\varphi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{0}^{\sqrt{\frac{\mathfrak{Tg}^2 \frac{x\pi}{2b} + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2}}{\mathfrak{Tg}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{2}}}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}.$$

Aus Symmetriegründen unterscheiden sich die φ-Werte in Punkten von BE und EF nur durch das Vorzeichen von den φ-Werten in den symmetrisch gelegenen Punkten auf FG und GC. Unter Benutzung der Druckgleichung (2) erhält man aus den φ-Werten die Druckverteilung an der Dammbasis und den Spundwandseiten. Es ist

$$p = \mu g H_1 - \mu g \frac{h}{2} - \mu \nu \varphi - \mu g y.$$

Die Spezialfälle (Bild 1b, Bild 1c). Setzt man in den Formeln (8) und (9) $\mu = 0$ bzw. $a = 0$, so erhält man die entsprechenden Formeln für den Damm ohne Spundwand (Bild 1b) bzw. für das Wehr (Bild 1c). Für den Sonderfall $\mu = 0$ erhält man aus (8) und (9)

$$\varphi + i\psi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{0}^{\mathfrak{Ctg}\frac{\zeta}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8b)$$

mit $k = \mathfrak{Tg}\frac{a}{2}$ und

$$Q = \frac{g}{\nu} h \frac{K\left(\frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{a}{2}}\right)}{2K\left(\mathfrak{Tg}\frac{a}{2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9b).$$

Für den Sonderfall $a = 0$ erhält man:

$$\varphi + i\psi = \frac{g}{\nu} h \frac{1}{2K(k)} \int_{0}^{\frac{\mathfrak{Ctg}\frac{\zeta}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\sqrt{1 + \mathfrak{Ctg}^2\frac{\zeta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}}} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8c),$$

mit $k = \sin\frac{\mu}{2}$ und

$$Q = \frac{g}{\nu} h \frac{K\left(\cos\frac{\mu}{2}\right)}{2K\left(\sin\frac{\mu}{2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9c).$$

Zahlentafel 1.

Tabelle für die $\frac{Q}{\frac{g}{\nu} h}$-Werte.

$\frac{a}{b}$ \ $\frac{m}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	∞	1,0298	0,8071	0,6746	0,5882	0,5000	0,4324	0,3705	0,3097	0,2427	0
0,1	1,0309	0,9172	0,7724	0,6586	0,5691	0,4952	0,4289	0,3682	0,3082	0,2418	0
0,2	0,8124	0,7763	0,6995	0,6188	0,5453	0,4792	0,4188	0,3613	0,3038	0,2391	0
0,3	0,6864	0,6690	0,6254	0,5701	0,5131	0,4574	0,4037	0,3509	0,2966	0,2343	0
0,4	0,5991	0,5888	0,5611	0,5223	0,4783	0,4324	0,3856	0,3380	0,2877	0,2295	0
0,5	0,5332	0,5263	0,5071	0,4787	0,4443	0,4064	0,3660	0,3237	0,2775	0,2232	0
0,6	0,4810	0,4761	0,4619	0,4402	0,4128	0,3812	0,3466	0,3090	0,2671	0,2164	0
0,7	0,4385	0,4347	0,4238	0,4065	0,3842	0,3576	0,3277	0,2943	0,2564	0,2094	0
0,8	0,4124	0,4000	0,3902	0,3773	0,3586	0,3360	0,3099	0,2803	0,2458	0,2023	0
0,9	0,3728	0,3695	0,3631	0,3514	0,3357	0,3163	0,2934	0,2667	0,2356	0,1953	0
1,0	0,3469	0,3449	0,3388	0,3288	0,3153	0,2984	0,2782	0,2544	0,2259	0,1888	0
1,5	0,2575	0,2565	0,2533	0,2481	0,2406	0,2309	0,2190	0,2042	0,1844	0,1595	0
2,0	0,2048	0,2041	0,2022	0,1988	0,1940	0,1922	0,1798	0,1698	0,1567	0,1338	0

Die Formel (9) wurde numerisch für die Werte $\frac{m}{b}=0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots 1$ und $\frac{a}{b}=0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots 1, 1\frac{1}{2}$ und 2 ausgewertet. Die Werte für Q findet man in Zahlentafel 1. Nach ihr ist das Diagramm (Bild 7) hergestellt worden. An Hand der Zahlentafel 1 kann für Werte $0 \leqq \frac{m}{b} \leqq 1$ und $0 \leqq \frac{a}{b} \leqq 2$ und beliebige h, $K=\frac{g}{\nu}$ und E (Flußbreite) die sekundlich versickernde Wassermenge berechnet werden. Führt man die Rechnungen für die folgenden Zahlenwerte durch, die auch Kano seinen beiden numerischen Beispielen zugrunde gelegt hat,

Dammbasisbreite:
$2a = 60$ m, Schichtbreite: $b = 15$ m,
Pegeldifferenz:
$h = 4$ m, Flußbreite: $E = 100$ m,
Durchlässigkeitskoeffizient:
$K = 0{,}002\ \mathrm{m^2\,sec^{-1}}$,
Spundwandlänge:
$m = 4$ m,

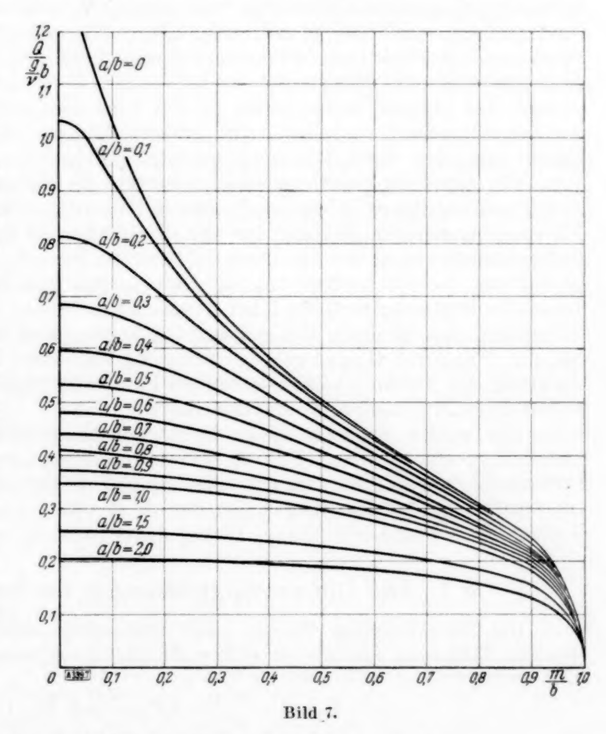


Bild 7.

so erhält man für die sekundlich versickernde Wassermenge im Falle $m = 0$:

$$Q \cdot E = 0{,}002 \cdot 4 \cdot 100 \cdot 0{,}2048 = \underline{0{,}1638}\ \mathrm{m^3}.$$

Der von Kano errechnete Wert $Q \cdot E = 0{,}2244$ liegt um 37 % über dem nach der exakten Formel berechneten Wert.

Im Falle $m = 4$ m erhält man:

$$Q \cdot E = 0{,}002 \cdot 4 \cdot 100 \cdot 0{,}2001 = \underline{0{,}16008}\ \mathrm{m^3}.$$

Der von Kano errechnete Wert $Q \cdot E = 0{,}166$ liegt um 3,6 % über dem nach der exakten Formel berechneten Wert.

Der Kompressibilitätseinfluß für dünne wenig gekrümmte Profile bei Unterschallgeschwindigkeit.

Von *W. Hantzsche* und *H. Wendt* in Braunschweig.

(Aus dem Institut für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring.)

Für die Berechnung von höheren Näherungen kompressibler Unterschallströmungen um dünne wenig gekrümmte Profile wird ein Verfahren angegeben, das von der Prandtlschen Näherung für schlanke Profile ausgeht und für alle unterkritischen Machschen Zahlen gilt. Dazu wird die Stromfunktion nach einem Parameter entwickelt, der die Abweichung der Profilform in Dicke, Wölbung und Anstellwinkel von einem geraden nichtangestellten Streckenprofil charakterisiert. Das erste Glied der Reihe stellt die ungestörte Parallelströmung dar. Die beiden ersten Glieder entsprechen der Prandtlschen Näherung. Die neue Verbesserung für etwas dickere Profile ergibt sich durch Hinzunahme des dritten Gliedes. Die Methode wurde in einigen Beispielen für die maximale Übergeschwindigkeit und den Auftrieb ausgewertet, die beide stärker mit der Machschen Zahl anwachsen als nach der Prandtlschen Formel.

Die Berechnung ebener, stationärer Potentialströmungen eines Gases im Unterschallgebiet kann nach Janzen (1913) und Rayleigh (1916) durch ein Verfahren schrittweiser Näherung vorgenommen werden. Es entspricht dies einer Entwicklung der Potential- bzw. Stromfunktion nach der Machschen Zahl. Die erste Näherung ist also die inkompressible Strömung. Die bei dem zweiten und dritten Schritt erhaltenen Approximationen gelten dann zwar für beliebige Profile und Anstellwinkel, aber nur für kleine Machsche Zahlen. Strömungen bei höheren Machschen Zahlen wird man praktisch schwer nach diesem Verfahren berechnen können, weil dazu eine größere Zahl von Schritten nötig ist. Die Rechenarbeit erhöht sich aber mit jedem Schritte beträchtlich.

Für dünne, schwach angestellte Profile, bei denen die Zusatzgeschwindigkeiten zur Anströmgeschwindigkeit klein sind, haben Prandtl (1927 veröff.) und Glauert (1928) eine Näherung angegeben, die sich für alle unterkritischen Geschwindigkeiten anwenden läßt. Die Differentialgleichung für das Potential bzw. die Stromfunktion nimmt in dieser Näherung eine Gestalt an, die durch affine Transformation einer unabhängigen Variablen auf die der inkompressiblen Strömung zurückgeführt werden kann. Einer Anregung von A. Busemann[1]) folgend haben wir eine Methode der sukzessiven Approximation für die Stromfunktion ausgearbeitet, die die Prandtl-Glauertsche Näherung als ersten Schritt hat. Sie entspricht einer Entwicklung der Stromfunktion nach einem Parameter, der die Abweichung des Profils vom nichtangestellten Streckenprofil charakterisiert.

Wir stellen zunächst (§ 1) die Differentialgleichungen für die einzelnen Schritte des Näherungsverfahrens auf. Für die zweite Näherung geben wir dann (§ 2) die Integration der Differentialgleichung an. In § 3 wird die zweite Näherung für einige Beispiele ausgerechnet. Die Profile sind dabei so ausgewählt, daß sie den Kompressibilitätseinfluß der charakteristischen Größen eines Profils (Wölbung, Dicke, Anstellwinkel) erkennen lassen.

§ 1. Die Differentialgleichungen für die einzelnen Näherungen.

Die Stromfunktion $\Psi(x, y)$ einer stationären rotationsfreien kompressiblen zweidimensionalen Strömung genügt der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Psi_{xx}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)-2\,\Psi_{xy}\frac{u\,v}{a^2}+\Psi_{yy}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=0 \quad \text{(1)},$$

wobei

$$u=\frac{\varrho_\infty}{\varrho}\Psi_y,\quad v=-\frac{\varrho_\infty}{\varrho}\Psi_x \quad \text{(2)}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x- bzw. y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind, und ϱ und a Dichte und Schallgeschwindigkeit bedeuten. Der Index ∞ bezeichnet den Zustand im Unendlichen, wo Parallelgeschwindigkeit ($u_\infty=-U$, $v_\infty=0$) angenommen werde. Dazu treten noch die aus dem Adiabatengesetze und der Bernoullischen Formel folgenden Beziehungen

[1]) A. Busemann: Effect of compressibility on thin slightly cambered aerofoils at subsonic speeds. British association for the advancement of science. Dundee Meeting 1939. Programme S. 56. Der dort angekündigte Vortrag fiel wegen des Krieges aus.

$$\frac{a_\infty^2}{\varkappa-1}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right)^{\varkappa-1}+\frac{u^2+v^2}{2}=\frac{a_\infty^2}{\varkappa-1}+\frac{U^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$a^2=a_\infty^2-\frac{\varkappa-1}{2}(u^2+v^2-U^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Bei Unterschallströmungen ist die Gl. (1) von elliptischem Typ. Für sehr dünne Profile kann man im Anschluß an Prandtl ihre Integration auf die für eine inkompressible Strömung gültige Gleichung $\Delta\Psi=0$ zurückführen. Vernachlässigt man nämlich in (1) die Querkomponente v und setzt $u=-U$ der Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen gleich, so erhält man:

$$\Psi_{xx}\left(1-\frac{U^2}{a_\infty^2}\right)+\Psi_{yy}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Diese Gleichung kann man aber durch eine Transformation der unabhängigen Variablen

$$\xi=x, \qquad \eta=y\sqrt{1-\frac{U^2}{a_\infty^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

auf die Gestalt $\Psi_{\xi\xi}+\Psi_{\eta\eta}=0$ bringen, die für die Stromfunktion der inkompressiblen Strömung gilt. Transformation (6) bewirkt eine affine Verzerrung des Stromlinienbildes in Richtung der y-Achse. Die neuen Stromlinien gehören zu der inkompressiblen Strömung um das ebenfalls mitverzerrte Profil. Die Potentiallinien werden bei diesem Vorgang natürlich nicht wieder in Potentiallinien übergeführt. Will man dies erreichen, dann muß man analog mit der Differentialgleichung der Potentialfunktion verfahren. Dies ist der Weg, den Prandtl ursprünglich vorschlug. Dann gehen aber die Stromlinien nicht wieder in Stromlinien über; und insbesondere muß man zu den verzerrten Potentiallinien ein neues Profil (als orthogonale Trajektorie) suchen.

Nur für sehr dünne, vorn und hinten zugespitzte Profile wird man (1) durch (5) ersetzen können. Wir wollen im folgenden angeben, wie die durch (5) erhaltene Näherung durch sukzessive Hinzunahme der nächsthöheren Glieder verbessert werden kann. Dazu denken wir uns Ψ nach einem Parameter λ entwickelt, der die Abweichung der Profilform von einem geraden nichtangestellten Streckenprofil charakterisiert (Dicke, Wölbung, Anstellwinkel):

$$\frac{\Psi}{U}=-y+g(x,y)\,\lambda+h(x,y)\,\lambda^2+f(x,y)\,\lambda^3+\cdots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Die Anströmgeschwindigkeit ist dabei in Richtung der negativen x-Achse angenommen.

Aus (7) erhalten wir für die Komponenten der Stromdichte $\frac{u\,\varrho}{U\,\varrho_\infty}=\frac{1}{U}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ und $\frac{v\,\varrho}{U\,\varrho_\infty}=-\frac{1}{U}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ Entwicklungen nach λ. Um die Geschwindigkeitskomponenten $\frac{u}{U}$ und $\frac{v}{U}$ selbst zu erhalten, verwenden wir die aus (3) folgende Beziehung zwischen der Dichte $\frac{\varrho}{\varrho_\infty}$ und der Stromdichte $\frac{D}{D_\infty}=\sqrt{\frac{\Psi_x^2+\Psi_y^2}{U^2}}$

$$\frac{\varrho_\infty}{\varrho}=1+\frac{\alpha^2\mu^2}{2}\left[\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2-1\right]+P\left[\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2-1\right]^2+\cdots,$$

wobei $\alpha=\frac{U}{a_\infty}$, $\mu^2=\frac{1}{1-\alpha^2}$ und $P=\frac{\alpha^4\mu^4}{8}[3+(\varkappa+1)\mu^2]$ gesetzt ist. Mit (7) ergibt sich dann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho_\infty}{\varrho}&=1-\alpha^2\mu^2 g_y\lambda+\left[\frac{\alpha^2\mu^2}{2}(g_x^2+g_y^2-2h_y)+4Pg_y^2\right]\lambda^2+\cdots\\
\frac{u}{U}&=-1+\mu^2 g_y\lambda+\left[-\frac{\alpha^2\mu^2}{2}(g_x^2+3g_y^2-2h_y)-4Pg_y^2+h_y\right]\lambda^2+\cdots\\
\frac{v}{U}&=-g_x\lambda+[\alpha^2\mu^2 g_x g_y-h_x]\lambda^2+\cdots\\
\left(\frac{U}{a}\right)^2&=\alpha^2\Big\{1-(\varkappa-1)\alpha^2\mu^2 g_y\lambda+\frac{\varkappa-1}{2}\alpha^2[\mu^2 g_x^2\\
&\quad+(3\alpha^2\mu^2+\mu^4+2(\varkappa-1)\alpha^2\mu^4+8P)g_y^2-2\mu^2 h_y]\lambda^2+\cdots\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Geht man mit diesen Ausdrücken in die Differentialgleichung (1) ein, so erhält man auch hier eine Entwicklung nach λ:

$$\begin{aligned}
&\lambda \{g_{xx}(1-\alpha^2) + g_{yy}\} \\
&+ \lambda^2 \{h_{xx}(1-\alpha^2) + h_{yy} - 2\alpha^2 g_x g_{xy} + [2\alpha^2\mu^2 + \alpha^4\mu^2(\varkappa-1)] g_y g_{xx}\} \\
&+ \lambda^3 \{f_{xx}(1-\alpha^2) + f_{yy} + [2\alpha^2\mu^2 + (\varkappa-1)\alpha^4\mu^2] g_y h_{xx} + g_{xx}[\gamma_1 g_x^2 + \gamma_2 g_y^2 + \gamma_3 h_y] \\
&- \alpha^2 g_x^2 g_{yy} - 2\alpha^2 g_x h_{xy} + 2\alpha^2 [(\varkappa\alpha^2+1)\mu^2 g_x g_y - h_x] g_{xy}\} + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_1 = -\frac{\varkappa+1}{2}\alpha^4\mu^2$$

$$\gamma_2 = -\alpha^2\left[\mu^4 + 3\alpha^2\mu^2 + 8P + (\varkappa-1)\left[\frac{3}{2}\alpha^4\mu^2 + \frac{5}{2}\alpha^2\mu^4 + 4\alpha^2 P\right] + (\varkappa-1)^2\alpha^4\mu^4\right]$$

$$\gamma_3 = 2\alpha^2\mu^2 + (\varkappa-1)\alpha^4\mu^2.$$

Da die Differentialgleichung für beliebige λ richtig sein muß, kann man die Ausdrücke, die bei λ, λ^2 usw. als Faktoren stehen, einzeln gleich Null setzen. Man erhält für die ersten drei Koeffizienten:

$$g_{xx}(1-\alpha^2) + g_{yy} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

$$h_{xx}(1-\alpha^2) + h_{yy} = 2\alpha^2 g_x g_{xy} - \{2\alpha^2\mu^2 + \alpha^4\mu^2(\varkappa-1)\} g_y g_{xx} \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

$$\left.\begin{aligned}
f_{xx}(1-\alpha^2) + f_{yy} = &-(2\alpha^2\mu^2 + (\varkappa-1)\alpha^4\mu^2) g_y h_{xx} + \alpha^2 g_x^2 g_{yy} \\
&- g_{xx}(\gamma_1 g_x^2 + \gamma_2 g_y^2 + \gamma_3 h_y) + 2\alpha^2 g_x h_{xy} \\
&- 2\alpha^2 g_{xy}([\varkappa\alpha^2+1]\mu^2 g_x g_y - h_x)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Die Differentialgleichungen (9), (10) und (11) gestatten g, h und f nacheinander zu ermitteln. Die Randbedingungen für g, h und f erhalten wir dabei aus den Forderungen über

$$\Psi = U\{-y + g(x,y)\lambda + h(x,y)\lambda^2 + f(x,y)\lambda^3 + \cdots\}$$

a) $\Psi = \text{const}$ auf dem Profil,

b) $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -U$ im unendlichfernen Punkt,

c) glatter Abfluß an der Hinterkante des Profils bzw. Staupunkt.

§ 2. Die erste und zweite Näherung.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Berechnung der ersten und der zweiten Näherung, behandeln also die Gl. (9) und (10). Führt man an Stelle von g und h die Abschnitte $\overline{\Psi}^{(1)}$ und $\overline{\Psi}^{(2)}$ der Stromfunktion Ψ ein:

$$\frac{\overline{\Psi}^{(1)}}{U} = -y + g\lambda$$

$$\frac{\overline{\Psi}^{(2)}}{U} = -y + g\lambda + h\lambda^2,$$

so genügen $\overline{\Psi}^{(1)}$ und $\overline{\Psi}^{(2)}$ offenbar den folgenden Gln. (12) und (13)

$$\overline{\Psi}^{(1)}_{xx}(1-\alpha^2) + \overline{\Psi}^{(1)}_{yy} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\Psi}^{(2)}_{xx}(1-\alpha^2) + \overline{\Psi}^{(2)}_{yy} = 2\alpha^2 &\left[\frac{\overline{\Psi}^{(1)}_x}{U}\overline{\Psi}^{(1)}_{xy} - \mu^2\left(1 + \frac{\overline{\Psi}^{(1)}_y}{U}\right)\overline{\Psi}^{(1)}_{xx}\right] \\
&- \alpha^4\mu^2(\varkappa-1)\overline{\Psi}^{(1)}_{xx}\left(1 + \frac{\overline{\Psi}^{(1)}_y}{U}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Da die abgebrochenen Entwicklungen $\overline{\Psi}^{(1)}$ und $\overline{\Psi}^{(2)}$ im allgemeinen die Randbedingungen von Ψ nur noch in ausreichender Näherung erfüllen, empfiehlt sich für die ersten beiden Schritte folgender anschaulicherer Weg:

Wir bestimmen eine im allgemeinen von $\overline{\Psi}^{(1)}(x,y)$ verschiedene „Stromfunktion" $\Psi^{(1)}(x,y)$, die der Gl. (12) genügt:

$$\Psi^{(1)}_{xx}(1-\alpha^2) + \Psi^{(1)}_{yy} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12\,a)$$

und dabei die Randbedingungen für Ψ exakt erfüllt, also:

a) $\Psi^{(1)} = \text{const}$ auf dem Profil,

b) $\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial y} = -U$ im Unendlichen,

c) glatter Abfluß an der Hinterkante bzw. Staupunkt.

Diese Funktion $\Psi^{(1)}(x, y)$, die offenbar der Prandtlschen Näherung gleichkommt, setzen wir auf der rechten Seite von (13) für $\overline{\Psi}^{(1)}$ ein und bestimmen nun eine Funktion $\Psi^{(2)}(x, y)$, die jetzt (13) erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} \Psi^{(2)}_{xx}(1-a^2) + \Psi^{(2)}_{yy} &= 2a^2\left[\frac{\Psi^{(1)}_x}{U}\Psi_{xy} - \mu^2\left(1+\frac{\Psi^{(1)}_y}{U}\right)\Psi^{(1)}_{xx}\right] \\ &\quad - a^4\mu^2(\varkappa-1)\,\Psi^{(1)}_{xx}\left(1+\frac{\Psi^{(1)}_y}{U}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (13a)$$

und dabei wieder den Randbedingungen von Ψ genügt:

a) $\Psi^{(2)} = \text{const}$ auf dem Profil,

b) $\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} = -U$ im Unendlichen,

c) glatter Abfluß an der Hinterkante bzw. Staupunkt.

Es ist zu erwarten, daß die so bestimmten Funktionen $\Psi^{(1)}$ und $\Psi^{(2)}$ sich von $\overline{\Psi}^{(1)}$ und $\overline{\Psi}^{(2)}$ nur in Gliedern höherer Ordnung als λ bzw. λ^2 unterscheiden. $\Psi^{(1)}$ genügt ja der gleichen Differentialgleichung wie $\overline{\Psi}^{(1)}$, nur wurden dabei die Randbedingungen genau erfüllt. In Gl. (13a) haben wir rechts gegenüber (13) zwar $\overline{\Psi}^{(1)}$ durch $\Psi^{(1)}$ ersetzt, eine Änderung der Differentialgleichung ist dabei aber erst in Gliedern der Ordnung λ^3 vorgenommen worden. Der genaue Nachweis, daß in den Entwicklungen nach λ:

$$\frac{\Psi}{U} = -y + g\,\lambda + h\,\lambda^2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\Psi^{(1)}}{U} = -y + g^{(1)}\,\lambda + h^{(1)}\,\lambda^2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\Psi^{(2)}}{U} = -y + g^{(2)}\,\lambda + h^{(2)}\,\lambda^2 + \cdots\cdots$$

die Funktionen $g(x, y)$, $g^{(1)}(x, y)$ und $g^{(2)}(x, y)$ identisch sind und weiter $h^{(2)}(x, y)$ mit $h(x, y)$ zusammenfällt, ist zwar grundsätzlich einfach, soll aber hier, da er etwas umfangreich ist, unterdrückt werden.

Um Gl. (12a) und (13a) zu integrieren, gehen wir durch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} &\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{\mu} \\ &\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu}\,\Psi(x, y), \quad \chi^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu}\,\Psi^{(1)}(x, y), \quad \chi^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu}\,\Psi^{(2)}(x, y) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

in die ξ, η-Ebene über. Wir erhalten dann:

$$\chi^{(1)}_{\xi\xi} + \chi^{(1)}_{\eta\eta} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

$$\left.\begin{aligned} \chi^{(2)}_{\xi\xi} + \chi^{(2)}_{\eta\eta} &= 2a^2\mu^2\left[\frac{\chi^{(1)}_\xi}{U}\chi^{(1)}_{\xi\eta} - \mu^2\chi^{(1)}_{\xi\xi}\left(1+\frac{\chi^{(1)}_\eta}{U}\right)\right] \\ &\quad - a^4\mu^4(\varkappa-1)\left[1+\frac{\chi^{(1)}_\eta}{U}\right]\chi^{(1)}_{\xi\xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

In der ξ, η-Ebene haben wir ein Profil, das durch ähnliche Verzerrung längs der y-Achse aus dem Profil der x, y-Ebene entsteht. Die Gl. (15) definiert $\chi^{(1)}(\xi, \eta)$ als Stromfunktion der inkompressiblen Strömung um dieses Profil. Die Anströmgeschwindigkeit dieser inkompressiblen Strömung ist mit Rücksicht auf $\chi^{(1)}_\eta = \Psi^{(1)}_y$ und $\chi^{(1)}_\xi = \Psi^{(1)}_x$ wieder $-U$.

Um $\chi^{(1)}(\xi, \eta)$ und $\chi^{(2)}(\xi, \eta)$ zu bestimmen, bilden wir weiter das Profil der ξ, η-Ebene auf den Kreis $r = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} = R$ der komplexen $\mathfrak{z}$-Ebene durch eine konforme Abbildung des Außengebietes des Profiles auf das Außengebiet des Kreises $r = R$ ab, wobei der unendlich ferne Punkt der ξ, η-Ebene in den der $\mathfrak{z}$-Ebene übergeht. Die Abbildungsfunktion sei durch die komplexe Beziehung gegeben:

$$\mathfrak{z} = F(\zeta), \; \zeta = f(\mathfrak{z}) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{z} &= \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y} \\ \zeta &= \xi + i\,\eta . \end{aligned}$$

Mit

$$\chi(\xi, \eta) = K(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \chi^{(1)}(\xi, \eta) = K^{(1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \chi^{(2)}(\xi, \eta) = K^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

wird nun aus (15) und (16) mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{y}^2}$:

$$\Delta K^{(1)} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17),$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta K^{(2)} = \left|\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\right|^2 \Bigg[\Bigg\{ 2\,a^2\mu^2 \left(\frac{\chi_\xi^{(1)}}{U}\chi_{\xi\eta}^{(1)} - \mu^2 \chi_{\xi\xi}^{(1)}\left(1+\frac{\chi_\eta^{(1)}}{U}\right)\right)\Bigg\} \\ - a^4\mu^4(\varkappa-1)\left[1+\frac{\chi_\eta^{(1)}}{U}\right]\chi_{\xi\xi}^{(1)}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (18).$$

Für $K^{(1)}$ bzw. $K^{(2)}$ haben wir offenbar die Randbedingungen:

a) $K^{(1)} = \text{const}$ bzw. $K^{(2)} = \text{const}$ auf dem Kreis.

b) $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \mathfrak{x}} = 0$, $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \mathfrak{y}} = -U$ bzw. $\frac{\partial K^{(2)}}{\partial \mathfrak{x}} = 0$, $\frac{\partial K^{(2)}}{\partial \mathfrak{y}} = -U$ im Unendlichen.

c) $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \mathfrak{x}} = 0$, $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial \mathfrak{y}} = 0$ bzw. $\frac{\partial K^{(2)}}{\partial \mathfrak{x}} = 0$, $\frac{\partial K^{(2)}}{\partial \mathfrak{y}} = 0$ im Bildpunkt der Hinterkante des Profiles.

$K^{(1)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ bestimmt sich nun wegen (17) als $\mathfrak{Im}\, U\, W(\mathfrak{z})$, wenn wir mit $U\, W(\mathfrak{z})$ das komplexe Potential für die inkompressible Strömung um den Kreis der $\mathfrak{z}$-Ebene mit der Anströmgeschwindigkeit $-U$ bei dem durch die Hinterkante des Profiles bestimmten Staupunkt bezeichnen. Mit den Symbolen $\mathfrak{Im}$ bzw. $\mathfrak{Re}$ wollen wir hier und im folgenden den Imaginär- bzw. Realteil einer komplexen Größe bezeichnen.

Die Integration von (18) läßt sich mit Hilfe von $W(\mathfrak{z})$ und der Abbildungsfunktion $\zeta(\mathfrak{z})$ ebenfalls angeben. Es gilt zunächst offenbar:

$$\frac{\chi_\xi^{(1)}}{U} = \mathfrak{Im}\left\{\frac{dW}{d\mathfrak{z}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right\}, \quad \frac{\chi_\eta^{(1)}}{U} = \mathfrak{Re}\left\{\frac{dW}{d\mathfrak{z}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right\}$$

und

$$\frac{\chi_{\xi\xi}^{(1)}}{U} = \mathfrak{Im}\left[\frac{d}{d\mathfrak{z}}\left\{\frac{dW}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right\}\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right]$$

$$\frac{\chi_{\xi\eta}^{(1)}}{U} = \mathfrak{Re}\left[\frac{d}{d\mathfrak{z}}\left\{\frac{dW}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right\}\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right].$$

Wegen $\left|\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\right|^2 = \frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta}\frac{\overline{d\mathfrak{z}}}{\overline{d\zeta}}$ kann man nun für (18) wie man sich leicht überzeugt schreiben:

$$\Delta\frac{K^{(2)}}{U} = \left(2\,a^2\mu^2 + \frac{a^4\mu^4}{2}(\varkappa+1)\right)\mathfrak{Im}\,\beta\,\bar\gamma + \frac{a^4\mu^4}{2}(\varkappa+1)\,\mathfrak{Im}\,\bar\beta\,\bar\gamma \quad \ldots \ldots (19),$$

wenn man zur Abkürzung unter β bzw. γ:

$$\beta = 1 + \frac{dW}{d\mathfrak{z}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} \quad \ldots \ldots (20),$$

$$\gamma = \frac{d\beta}{d\mathfrak{z}}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{d\mathfrak{z}}} \quad \ldots \ldots (21)$$

versteht. Der Querstrich bedeutet Übergang zur konjugiert komplexen Größe.

Zur Lösung von (19) empfiehlt es sich an Stelle von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die komplexen Variablen $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} - i\,\mathfrak{y}$ einzuführen. Bei der Behandlung der inkompressiblen Strömung hat schon Busemann[2]) diese Transformation verwandt. Imai und Aihari[3]) haben sie neuerdings bei der Durchführung der Rayleighschen Näherung benutzt.

Mit dieser Transformation nimmt nun (19) die Gestalt an:

$$\frac{1}{U}\frac{\partial^2 K}{\partial\mathfrak{z}\,\partial\bar{\mathfrak{z}}} = \left\{\frac{a^2\mu^2}{2} + \frac{a^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\right\}\mathfrak{Im}\,\beta\,\bar\gamma + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\mathfrak{Im}\,\bar\beta\,\bar\gamma.$$

Wegen

$$\left.\begin{aligned} \beta\,\bar\gamma &= \left(\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}} + \frac{dW}{d\mathfrak{z}}\right)\frac{\overline{d\beta}}{\overline{d\mathfrak{z}}} \\ \bar\beta\,\bar\gamma &= \bar\beta\cdot\frac{\overline{d\beta}}{\overline{d\mathfrak{z}}}\cdot\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (22)$$

ergibt die Integration dann:

---

[2]) A. Busemann in A. Föppl: Vorlesung über Technische Mechanik Bd. IV, Dynamik. 8. Auflage, Leipzig 1933, S. 383.

[3]) I. Imai und T. Aihari: On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder. Rep. of Aeron. Research Inst. Tokyo, Bd. XV, 8 (1940), S. 185.

$$\left.\begin{aligned}\frac{K^{(2)}}{U} &= \left\{\frac{\alpha^2 \mu^2}{2} + \frac{\alpha^4 \mu^4 (\varkappa+1)}{8}\right\} \mathfrak{Im}\,(\zeta + W)\bar{\beta} \\ &+ \frac{\alpha^4 \mu^4}{16}(\varkappa+1)\,\mathfrak{Im}\,\zeta\bar{\beta}^2 \\ &+ \mathfrak{Im}\,\{F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Die Funktionen $F(\mathfrak{z})$ bzw. $G(\bar{\mathfrak{z}})$ sind in $\mathfrak{z}$ bzw. $\bar{\mathfrak{z}}$ analytische Funktionen. $F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})$ bestimmt sich durch die Randbedingungen für $K^{(2)}$ (S. 76).

Die formale Verwendung von $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ als unabhängige Variable bedarf noch der Rechtfertigung.

Der konjugiert komplexe Wert $\overline{f(\mathfrak{z})}$ einer analytischen Funktion $f(\mathfrak{z})$ von $\mathfrak{z}$ ist keine analytische Funktion von $\mathfrak{z}$ mehr; dagegen ist $\overline{f(\mathfrak{z})}$ offenbar analytisch in $\bar{\mathfrak{z}}$. Wir schreiben um dies auszudrücken

$$\overline{f(\mathfrak{z})} = \bar{f}(\bar{\mathfrak{z}}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Wegen $\overline{d\,\mathfrak{z}} = d\,\bar{\mathfrak{z}}$ gilt dann offenbar für die Ableitungen von $\bar{f}$ nach $\mathfrak{z}$:

$$\frac{\overline{d f}}{d\,\mathfrak{z}} = \frac{d\,\bar{f}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}}, \quad \frac{\overline{d^2 f(\mathfrak{z})}}{d\,\mathfrak{z}^2} = \frac{d^2 \bar{f}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Damit kann man Gl. (19) mit Rücksicht auf (22) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\Delta \frac{K^{(2)}}{U} &= \left(2\alpha^2\mu^2 + \frac{\alpha^4\mu^4}{2}(\varkappa+1)\right)\left[\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{d\,\zeta(\mathfrak{z})}{d\,\mathfrak{z}} + \frac{d\,W(\mathfrak{z})}{d\,\mathfrak{z}}\right)\frac{d\bar{\beta}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}} - \left(\frac{d\,\bar{\zeta}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{d\,\overline{W}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\mathfrak{z}}\right)\frac{d\,\beta(\mathfrak{z})}{d\,\mathfrak{z}}\right\}\right] \\ &+ \frac{\alpha^4\mu^4}{2}(\varkappa+1)\left[\frac{1}{2i}\left\{\bar{\beta}(\bar{\mathfrak{z}})\frac{d\,\bar{\beta}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}}\frac{d\,\zeta(\mathfrak{z})}{d\,\mathfrak{z}} - \beta(\mathfrak{z})\frac{d\,\beta(\mathfrak{z})}{d\,\mathfrak{z}}\frac{d\,\bar{\zeta}(\bar{\mathfrak{z}})}{d\,\bar{\mathfrak{z}}}\right\}\right]\end{aligned}\right\}. \quad (26).$$

Läßt man jetzt vorübergehend die unabhängigen Variablen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ jede für sich komplexe Werte $\mathfrak{x}_1 + i\,\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_1 + i\,\mathfrak{y}_2$ annehmen, so werden offenbar $\beta(\mathfrak{z})$, $W(\mathfrak{z})$, $\bar{\beta}(\bar{\mathfrak{z}})$, $\overline{W}(\bar{\mathfrak{z}})$ und $K^{(2)}$ analytische Funktionen der beiden komplexen Variablen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. An Stelle von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ führen wir nun als unabhängige Veränderliche

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}$$

und

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{x} - i\,\mathfrak{y}$$

ein. Dann geht (26) über in:

$$\begin{aligned}\frac{1}{U}\cdot\frac{\partial^2 K^{(2)}}{\partial\mathfrak{z}_1\partial\mathfrak{z}_2} &= \left(\frac{\alpha^2\mu^2}{2} + \frac{\alpha^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\right)\left[\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{d\,\zeta(\mathfrak{z}_1)}{d\,\mathfrak{z}_1} + \frac{d\,W(\mathfrak{z}_1)}{d\,\mathfrak{z}_1}\right)\frac{d\,\bar{\beta}(\mathfrak{z}_2)}{d\,\mathfrak{z}_2} - \left(\frac{d\,\bar{\zeta}(\mathfrak{z}_2)}{d\,\mathfrak{z}_2} + \frac{d\,\overline{W}(\mathfrak{z}_2)}{d\,\mathfrak{z}_2}\right)\frac{d\,\beta(\mathfrak{z}_1)}{d\,\mathfrak{z}_1}\right\}\right] \\ &+ \frac{\alpha^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\left[\frac{1}{2i}\left\{\bar{\beta}(\mathfrak{z}_2)\frac{d\,\bar{\beta}(\mathfrak{z}_2)}{d\,\mathfrak{z}_2}\frac{d\,\zeta(\mathfrak{z}_1)}{d\,\mathfrak{z}_1} - \beta(\mathfrak{z}_1)\frac{d\,\beta(\mathfrak{z}_1)}{d\,\mathfrak{z}_1}\frac{d\,\bar{\zeta}(\mathfrak{z}_2)}{d\,\mathfrak{z}_2}\right\}\right].\end{aligned}$$

Für $K^{(2)}$ ergibt sich also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{K^{(2)}}{U} &= \left(\frac{\alpha^2\mu^2}{2} + \frac{\alpha^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\right)\left[\frac{1}{2i}\{(\zeta(\mathfrak{z}_1) + W(\mathfrak{z}_1))\bar{\beta}(\mathfrak{z}_2) - (\bar{\zeta}(\mathfrak{z}_2) + \overline{W}(\mathfrak{z}_2))\beta(\mathfrak{z}_1)\}\right] \\ &+ \frac{\alpha^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\left[\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{2}(\bar{\beta}(\mathfrak{z}_2))^2\zeta(\mathfrak{z}_1) - \frac{1}{2}(\beta(\mathfrak{z}_1))^2\bar{\zeta}(\mathfrak{z}_2)\right\}\right] \\ &- i\,F(\mathfrak{z}_1) - i\,G(\mathfrak{z}_2)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27),$$

wobei $F(\mathfrak{z}_1)$ und $G(\mathfrak{z}_2)$ analytische Funktionen von $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ sind. Beschränkt man sich wieder auf reelles x und y, dann wird $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_2 = \bar{\mathfrak{z}}$. Nimmt man weiter, um eine reelle Lösung von (19) zu erhalten, noch den Realteil von (27), so bekommt man schließlich mit Rücksicht auf (24) und (25) den Ausdruck (23):

$$\begin{aligned}\frac{K^{(2)}}{U} &= \left(\frac{\alpha^2\mu^2}{2} + \frac{\alpha^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\right)\mathfrak{Im}\,\{(\zeta(\mathfrak{z}) + W(\mathfrak{z}))\,\overline{\beta(\mathfrak{z})}\} \\ &+ \frac{\alpha^4\mu^4}{16}(\varkappa+1)\,\mathfrak{Im}\,\{\zeta(\mathfrak{z})\,\overline{\beta(\mathfrak{z})^2}\} + \mathfrak{Im}\,(F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})).\end{aligned}$$

Wir wollen dafür abgekürzt schreiben:

$$\frac{K^{(2)}}{U} = \mathfrak{Im}\,[H(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}) + F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})].$$

Bei der Bestimmung von $F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})$ empfiehlt es sich, zunächst die Funktion $W(\mathfrak{z})$ $\left(\frac{K^{(1)}}{U} = \mathfrak{Im}\,W\right)$ abzuspalten; dadurch ist die Bedingung im Unendlichen erfüllt. Den Rest

ermitteln wir in der Weise, daß wir eine Summe von Funktionen von $\mathfrak{z}$ bzw. $\bar{\mathfrak{z}}$, die im Außengebiet des Kreises $r = R$ bis auf den unendlichfernen Punkt analytisch sind, mit folgenden Eigenschaften suchen: Mit entgegengesetztem Vorzeichen soll

1. der Imaginärteil des Restes mit dem von $H(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ auf dem Kreise $r = R$ übereinstimmen,

2. die Ableitung des Imaginärteiles nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ im Unendlichen gleich der von $\mathfrak{Im}\, H(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ sein. (Wegen der Bedeutung von β, W und ζ verschwinden übrigens die ersten Ableitungen von $\mathfrak{Im}\, H(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ im Unendlichen.)

Durch Hinzunahme eines zu $\mathfrak{Im}\,(i \cdot \ln \mathfrak{z})$ proportionalen Gliedes kann noch der Staupunkt in Ordnung gebracht werden.

In den meisten Beispielen ersetzen wir die Bedingung 1. durch die weitergehende Forderung, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von $H(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ auf dem Kreise vollständig durch die Zusatzfunktion, die man dann leicht angeben kann, kompensiert wird. $H(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})$ zerfällt nämlich in eine Summe von Produkten analytischer Funktionen der Form $h_1(\mathfrak{z})\, h_2(\bar{\mathfrak{z}})$. Für ein einzelnes Glied $h_1(\mathfrak{z}) \cdot h_2(\bar{\mathfrak{z}})$ kann man dann durch Hinzufügen des Ausdruckes $-h_1\left(\frac{R^2}{\bar{\mathfrak{z}}}\right) \cdot h_2(\bar{\mathfrak{z}})$ bzw. $-h_1(\mathfrak{z})\left(\frac{R^2}{\mathfrak{z}}\right)$ stets erreichen, daß auf dem Kreise die Randbedingung erfüllt ist. Dabei treten aber unter Umständen Singularitäten im Außengebiet des Kreises auf. Immer ist dies nicht der Fall, wie durchgeführte Beispiele zeigen, auch ist oft eine einfache Beseitigung dieser möglich.

§ 3. Die Berechnung der zweiten Näherung.

Nach dem eben entwickelten Verfahren ist der zweite Schritt für den Kompressibilitätseinfluß in einigen Beispielen gerechnet worden. Die Profile sind so ausgewählt, daß sie den Einfluß der charakteristischen Größen Wölbung, Dicke und Anstellwinkel zeigen.

a) Einfluß der Wölbung (Nichtangestelltes Kreisbogenprofil).

Wir untersuchen zunächst ein nichtangestelltes Kreibogenprofil in einer Parallelströmung. Die Abbildungsfunktion

$$\zeta = \mathfrak{z} + \frac{i f}{2} + \frac{a^2 - \frac{f^2}{4}}{\mathfrak{z} + \frac{i f}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

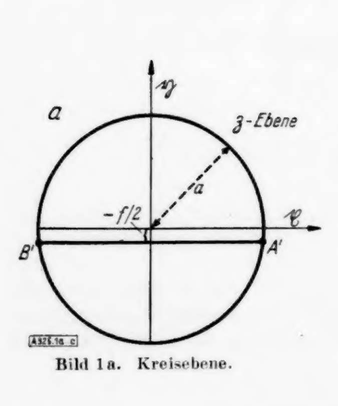


Bild 1a. Kreisebene.

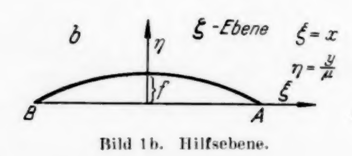


Bild 1b. Hilfsebene.

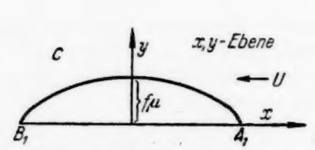


Bild 1c. Strömungsebene.

bildet den Kreis $r = a$ der $\mathfrak{z}$-Ebene auf einen Kreisbogen $\widehat{AB}$ der Pfeilhöhe f in der $\xi\,\eta$-Ebene ab. Die Punkte A und B sind die Bilder der durch $\mathfrak{y} = -\frac{f}{2}$ festgelegten Punkte A' und B' des Kreises in der $\mathfrak{z}$-Ebene. In der $x\,y$-Ebene erhalten wir nach (14) dann einen „Kreisbogen" $\widehat{A_1 B_1}$ mit der Pfeilhöhe $f\mu$. (Bild 1a, b, c.)

Die komplexe Stromfunktion $U\,W$ der inkompressiblen Strömung mit der Anströmgeschwindigkeit $-U$ um den Kreis $r = a$ in der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene bei den Staupunkten A' und B' ist:

$$U\,W = -U\left(\mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right) - U f i \ln \mathfrak{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Der Parameter λ, die Wölbung des Kreisbogens $\widehat{A_1 B_1}$ ist $\tau = \frac{f\mu}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{f\mu}{\overline{AB}} = \frac{f\mu}{4\sqrt{a^2 - \frac{f^2}{4}}}$.

Daraus ergibt sich $f = \frac{4\,a\,\tau}{\mu} - \frac{8\,a\,\tau^3}{\mu^3} + \cdots$ oder bis zu den quadratischen Gliedern in τ genau

$f=\frac{4a\tau}{\mu}$. Wir haben also in (28) und (29) den Wert $f=\frac{4\tau a}{\mu}$ zu wählen, um in der x,y-Ebene um ein Kreisbogenprofil der Wölbung τ eine Strömung mit der Anströmgeschwindigkeit $-U$ zu erhalten. Der Einfachheit halber entwickeln wir nach f oder $\frac{f}{a}$ und schreiben erst das Ergebnis auf τ um. Der Bogen $\widehat{A_1 B_1}$ in der xy-Ebene ist genau genommen ein Ellipsenbogen, die Abweichung von einem Kreisbogen der Pfeilhöhe $f\,\mu$ liegt aber erst in der Größenordnung $(f\,\mu)^3$, kann also bei der Berechnung des zweiten Schrittes vernachlässigt werden.

Die Größe $\beta=1+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}$ wird nach (29):

$$\beta=-\frac{if}{\mathfrak{z}}+\frac{f^2}{4\mathfrak{z}^2}.$$

Damit erhält man $\frac{K^{(1)}}{U}=\mathfrak{Im}\left\{-\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)-f\,i\ln\mathfrak{z}\right\}$ und

$$\frac{K^{(2)}}{U}=\frac{K^{(1)}}{U}+\left(\frac{a^2\mu^2}{2}+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right)\cdot\mathfrak{Im}\,f^2\left(\frac{a^2}{2\mathfrak{z}^2\bar{\mathfrak{z}}}+\frac{\ln\mathfrak{z}}{\bar{\mathfrak{z}}}\right)$$
$$+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16}\,\mathfrak{Im}\,f^2\left\{-\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2}\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)\right\}+\mathfrak{Im}\,(F(\mathfrak{z})+G(\bar{\mathfrak{z}}))\,.$$

Dabei wurden bei den Termen $\mathfrak{Im}\,(\zeta+W)\,\bar{\beta}$ bzw. $\mathfrak{Im}\,(\zeta\,\bar{\beta}^2)$ nur die Entwicklung nach f bis zu den Gliedern in f^2 angegeben. Die Beschränkung darauf ist gestattet, weil unser zweiter Schritt nur die Glieder bis einschließlich f^2 richtig wiedergibt.

Die Funktionen $F(\mathfrak{z})$ und $G(\bar{\mathfrak{z}})$ lassen sich nach dem S. 78 angegebenen Verfahren sofort angeben. $K^{(2)}$ nimmt dann die Gestalt an:

$$\frac{K^{(2)}}{U}=\mathfrak{Im}\left\{-\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)-f\,i\ln\mathfrak{z}\right\}$$
$$+f^2\left\{\frac{a^2\mu^2}{2}+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right\}\mathfrak{Im}\left\{\frac{a^2}{2\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}^2}-\frac{1}{2\mathfrak{z}}+\frac{\ln\mathfrak{z}}{\bar{\mathfrak{z}}}-\frac{\ln\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}}{\bar{\mathfrak{z}}}\right\}$$
$$+f^2\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16}\,\mathfrak{Im}\left\{-\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2}\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)+\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\left(\bar{\mathfrak{z}}+\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}\right)\right\}.$$

$\ln\mathfrak{z}$ ist dabei dadurch eindeutig gemacht, daß die $\mathfrak{z}$-Ebene längs der negativen $\mathfrak{x}$-Achse aufgeschnitten ist.

Daß die Punkte $\mathfrak{z}=\pm\sqrt{a^2-\frac{f^2}{4}}-f\frac{i}{2}$ Staupunkte sind, bestätigt man leicht. $\frac{\partial K^{(1)}}{\partial r}$ ist in diesen nach (29) Null. Die mit f^2 behafteten Glieder $K^{(2)}$ geben aber zu $\frac{\partial K^{(2)}}{\partial r}$ für $\mathfrak{z}=\pm\sqrt{a^2-\frac{f^2}{4}}-f\frac{i}{2}$ nur Beiträge in höheren Gliedern als f^2, denn die unter den Zeichen $\mathfrak{Im}$ stehenden Ausdrücke sind nach r abgeleitet für $\mathfrak{z}=\pm a$ reell.

Setzt man $\mathfrak{z}=r\,e^{i\varphi}$, so erhält man daraus in reeller Form, wenn noch $f=\frac{4\tau a}{\mu}$ eingeführt wird:

$$\frac{K^{(2)}}{U}=\left(-r+\frac{a^2}{r}\right)\sin\varphi-\frac{4\tau a}{\mu}\ln r$$
$$+\frac{16\tau^2a^2}{\mu^2}\left[\sin\varphi\left\{\left(a^2\mu^2+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{4}\right)\frac{\ln r}{r}-\frac{a^2}{8}\left(2a^2\mu^2+a^4\mu^4(\varkappa+1)\right)\frac{1}{r^3}\right.\right.$$
$$\left.-\left\{\left(a^2\mu^2+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{4}\right)\ln a-\frac{a^2\mu^2}{4}-\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right\}\frac{1}{r}\right\}$$
$$\left.+\sin3\varphi\left\{\frac{-a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16\,r}+\frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)\,a^2}{16\,r^3}\right\}\right].$$

Aus dem Ausdruck für $K^{(2)}$ ergibt sich dann wegen $\chi^{(2)}=\frac{\Psi^{(2)}(x,y)}{\mu}$ und $K^{(2)}=\chi^{(2)}$ bis zu den Gliedern τ^2 genau die Näherung $\Psi^{(2)}$ der Stromfunktion. Berechnet man nun daraus die Maximalgeschwindigkeit am Kreisbogen, so erhält man für diese einen bis zum quadratischen Glied in τ richtigen Ausdruck:

$$-\frac{u_{\max}}{U}=1+4\tau\mu+\tau^2(6\mu^4-2+3(\varkappa-1)a^4\mu^4)\quad\ldots\ldots\quad(30).$$

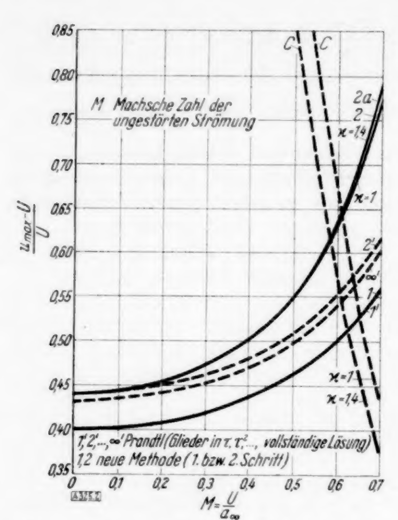


Bild 2. Maximalgeschwindigkeit bei dem nichtangestellten Kreisbogenprofil der Wölbung $\frac{1}{10}$.

Bild 2 zeigt die Maximalgeschwindigkeit an einem Kreisbogen der Wölbung $\frac{1}{10}$ in Abhängigkeit der Machschen Zahl. Kurve 1 entspricht dem Ausdruck (30), wenn man nur das konstante und lineare Glied in τ berücksichtigt. Kurve 2 und 2a stellen den vollständigen Ausdruck (30) für $\varkappa = 1$ bzw. $\varkappa = 1{,}4$ dar. Die daneben noch eingezeichneten Kurven 1', 2' usw. entsprechen der Entwicklung der eigentlichen Prandtlschen Näherung $\Psi^{(1)}$ nach τ (Gl. (12)).

Die Kurven C geben an, wo die kritische Machsche Zahl für $\varkappa = 1$ bzw. $\varkappa = 1{,}4$ erreicht wird.

Der Auftrieb ist in $K^{(2)}$ durch die Vorzahl von $\ln r$ bestimmt (vgl. Anhang). Da diese sich gegenüber der in $K^{(1)}$ nicht geändert hat, ist der Auftrieb der gleiche wie bei der ersten Näherung, in Übereinstimmung damit, daß er eine ungerade Funktion der Wölbung τ ist.

Der Kreisbogen stellt das einfachste Beispiel für unsere Methode dar. In diesem Falle kommt man auch leicht mit reellen unabhängigen Variablen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ durch.

Gl. (19) nimmt nämlich die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta K^{(2)}}{U} &= -\left[2 a^2 \mu^2 + \frac{a^4 \mu^4 (\varkappa+1)}{2}\right] f^2 \left[\frac{\sin\varphi}{r^3} + \frac{a^2 \sin\varphi}{r^5}\right] \\ &\quad + \frac{a^4 \mu^4 (\varkappa+1)}{2} \cdot f^2 \left[\frac{\sin 3\varphi}{r^3} - \frac{a^2 \sin\varphi}{r^5}\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (31).$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, daß $\Delta K = A\, r^p \sin n\varphi$ (A, p, n Konstante) das folgende partikuläre Integral hat:

$$K = A \sin n\varphi \left[\frac{r^{p+2}}{(p+2)^2 - n^2} - \frac{a^{p+2+n}}{(p+2)^2 - n^2} \cdot \frac{1}{r^n}\right], \quad \text{wenn } (p+2)^2 - n^2 \neq 0,$$

$$K = A \sin n\varphi \left[\frac{r^{p+2}}{2(p+2)} \ln r - \frac{a^{p+2+n}}{2(p+2)} \frac{\ln a}{r^n}\right], \quad \text{wenn } (p+2)^2 - n^2 = 0.$$

Da diese Ausdrücke für K auf dem Kreis $r = a$ konstant sind und im Außengebiet des Kreises keine Singularitäten haben, kann man damit ohne weiteres die Lösung von (31) angeben; sie stimmt mit der nach der komplexen Methode erhaltenen überein.

Bei den folgenden Beispielen ist die komplexe Methode vorzuziehen. Durch Entwicklung der rechten Seite von (19) nach Termen der Form $r^p \cos n\varphi$ bzw. $r^p \sin n\varphi$ könnte man auch mit reellen Variablen arbeiten. Nur ist die Konvergenz der Entwicklung in den Beispielen nicht immer gewährleistet oder es sind auch nur Entwicklungen nach Doppelsummen möglich, so daß man praktisch auf diese Weise schwer durchkommt.

b) Einfluß der Dicke (Ellipse, Kreiszweieck).

1. Nichtangestellte Ellipse.

Wir berechnen nun den zweiten Schritt für die nichtangestellte Ellipse in Parallelströmung.

Die Funktion:

$$\zeta = \mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

bildet den Kreis $r = a + d$ der $\mathfrak{z}$-Ebene in eine Ellipse mit den Achsen:

$$a + d - \frac{a^2}{a+d} \quad \text{und} \quad a + d + \frac{a^2}{a+d}$$

der ζ-Ebene ab. Die nachfolgende Verzerrung (14) gibt in der xy-Ebene eine Ellipse mit den Achsen:

$$\mu\left[a + d - \frac{a^2}{a+d}\right] \quad \text{und} \quad a + d + \frac{a^2}{a+d}$$

oder dem Achsenverhältnis

$$\varepsilon = \frac{\mu\left[(a+d)^2 - a^2\right]}{(a+d)^2 + a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33).$$

Wir werden im folgenden d bzw. $\frac{d}{a}$ als Parameter verwenden und erst das Ergebnis auf ε umschreiben.

Die komplexe Stromfunktion $U\,W(\mathfrak{z})$ der Strömung um den Kreis mit dem Radius $r = a + d$, den Staupunkten $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ und der Anströmgeschwindigkeit $-U$ ist:

$$U\,W(\mathfrak{z}) = -U\left(\mathfrak{z} + \frac{(a+d)^2}{\mathfrak{z}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34).$$

Mit (32) und (34) wird

$$\beta = \frac{(a+d)^2 - a^2}{\mathfrak{z}^2 - a^2}.$$

$K^{(1)}$ bzw. $K^{(2)}$ bekommen nun die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K^{(1)}}{U} &= \Im\mathrm{m}\, W(\mathfrak{z}) = -\Im\mathrm{m}\left(\mathfrak{z} + \frac{(a+d)^2}{\mathfrak{z}}\right) \\ \frac{K^{(2)}}{U} &= \frac{K^{(1)}}{U} + \left(\frac{a^2\mu^2}{2} + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right)\Im\mathrm{m}\left[\left(\frac{a^2}{\mathfrak{z}} - \frac{(a+d)^2}{\mathfrak{z}}\right)\left(\frac{2\,a\,d + d^2}{\mathfrak{z}^2 - a^2}\right)\right] \\ &\quad + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16}\Im\mathrm{m}\left[\left\{\mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right\}\left\{\frac{2\,a\,d + d^2}{\mathfrak{z}^2 - a^2}\right\}^2\right] + \Im\mathrm{m}\,(F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (35).$$

Die Funktion $F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})$ läßt sich nach dem Verfahren von S. 78 angeben. Man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K^{(2)}}{U} &= \frac{K^{(1)}}{U} + \left(\frac{a^2\mu^2}{2} + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right)\Im\mathrm{m}\left[\left\{\frac{a^2}{\mathfrak{z}} - \frac{(a+d)^2}{\mathfrak{z}} + \bar{\mathfrak{z}} - \frac{a^2}{(a+d)^2}\bar{\mathfrak{z}}\right\}\left\{\frac{2\,a\,d + d^2}{\bar{\mathfrak{z}}^2 - a^2}\right\}\right] \\ &\quad + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16}\Im\mathrm{m}\left[\left\{\mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}} - \frac{(a+d)^2}{\bar{\mathfrak{z}}} - \frac{a^2}{(a+d)^2}\bar{\mathfrak{z}}\right\}\left\{\frac{2\,a\,d + d^2}{\bar{\mathfrak{z}}^2 - a^2}\right\}^2\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; (36).$$

Man erkennt leicht, daß (36) die Stromfunktion für die zirkulationsfreie Strömung um die nichtangestellte Ellipse ist. Bei Spiegelung an der $\mathfrak{x}$-Achse (Übergang zur konjungiert komplexen Größe in den hinter dem Zeichen $\Im\mathrm{m}$ stehenden Ausdrücken) wechselt $K^{(2)}$ nur sein Zeichen.

Im Gegensatz zur Behandlung des Kreisbogens haben wir in (35) keine Entwicklung nach dem Parameter d vorgenommen. Das wäre auch hier möglich und würde die Rechnung vereinfachen. So nimmt (35) z. B. dann die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \frac{K^{(2)}}{U} &= \frac{K^{(1)}}{U} + \left(\frac{a^2\mu^2}{2} + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right)d^2\,\Im\mathrm{m}\left[-\frac{4\,a^2}{\mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{z}}^2 - a^2)}\right] \\ &\quad + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{16}d^2\,\Im\mathrm{m}\left\{\left[\mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right]\frac{4\,a^2}{(\bar{\mathfrak{z}}^2 - a^2)^2}\right\} + \Im\mathrm{m}\,(F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (35\,\mathrm{a})$$

an. Dies ist aber nicht empfehlenswert, weil man nun im Rahmen dieser Näherung die Randbedingung für die mit d^2 behafteten Glieder am Kreise $r = a$ und nicht bei $r = a + d$ erfüllen wird. Auf diesem Kreise liegen aber die singulären Punkte der rechten Seite von (35a): $\mathfrak{z} = \pm a$.

Aus dem Ausdruck (36) für $K^{(2)}$ kann man nun die Maximalgeschwindigkeit an der Ellipse ermitteln. Mit (33) $\frac{d}{a} = \frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\varepsilon^2}{2\mu^2} + \cdots$ ergibt sich für eine Ellipse des Dickenverhältnisses ε bis zum quadratischen Glied in ε genau:

$$\frac{-u_{\max}}{U} = 1 + \varepsilon\,\mu + \varepsilon^2\frac{(\mu^2-1)}{4}\left[\mu^2 + 1 + \frac{\varkappa - 1}{2}(\mu^2 - 1)\right].$$

Bild 3 zeigt die Übergeschwindigkeit bei einer Ellipse der Dicke $\frac{1}{10}$ in Abhängigkeit von der Machschen Zahl der Anströmung. Die Kurven C geben wieder an, wo die kritische Geschwindigkeit erreicht wird.

Die Bilder 4a und 4b zeigen noch die kritische Machsche Zahl als Funktion des Dickenverhältnisses der Ellipse. Zum Vergleich sind dabei wieder die von Kaplan nach Rayleigh-Poggi gerechneten Werte eingetragen. Die weiter eingezeichnete Kurve von Tsien[4]) ist mit der Hodographenmethode gewonnen, wobei die adiabatische Druck-Volumenbeziehung linear angenommen wurde (Tangente in dem dem Zustand der Anströmung entsprechenden Punkte).

[4]) H. S. Tsien: Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. Journ. Aeron. Sci. Bd. 6 (1939), S. 399 bis 407.

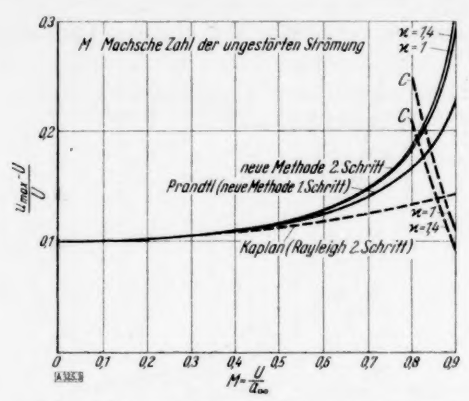


Bild 3. Maximalgeschwindigkeit an einer Ellipse mit dem Achsenverhältnis $\frac{1}{10}$.

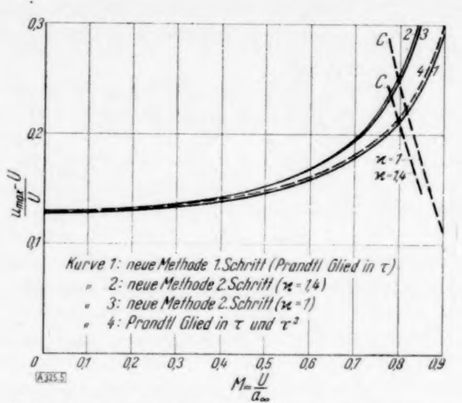


Bild 5. Maximalgeschwindigkeit beim nichtangestellten Kreiszweieck der Dicke $\tau = \frac{1}{10}$.

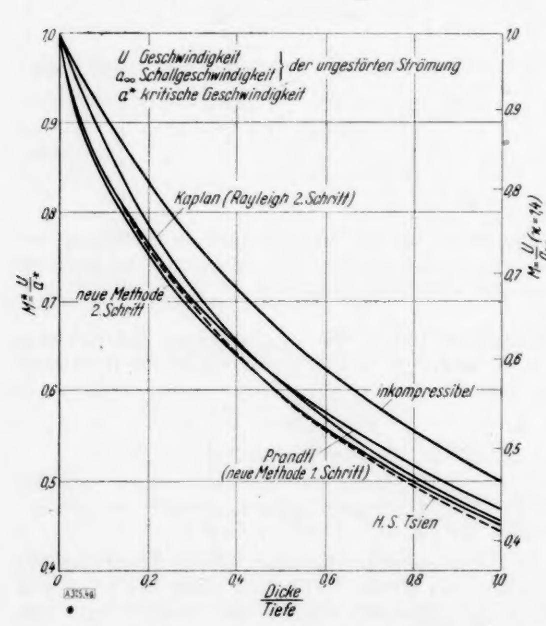


Bild 4a. Die kritische Anströmgeschwindigkeit $\frac{U}{a^*}$ als Funktion des Achsenverhältnisses der Ellipse.

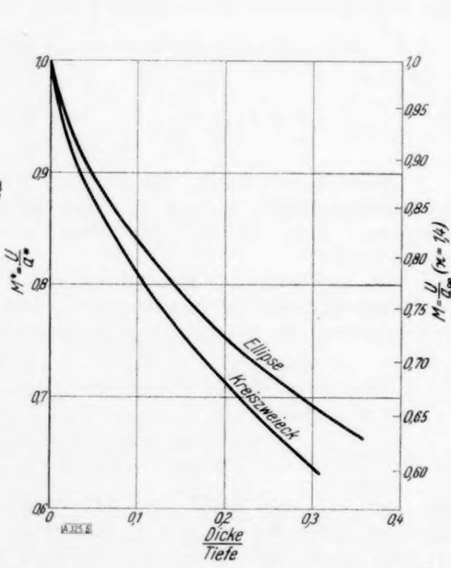
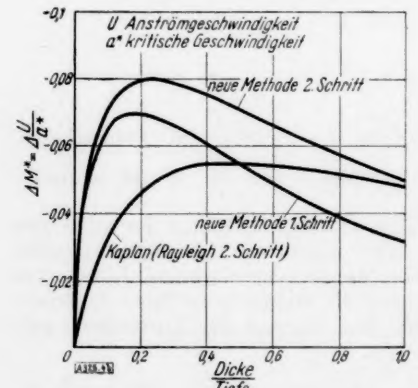


Bild 6. Die kritische Anströmgeschwindigkeit $\frac{U}{a^*}$ als Funktion der Dicke des Kreiszweiecks.



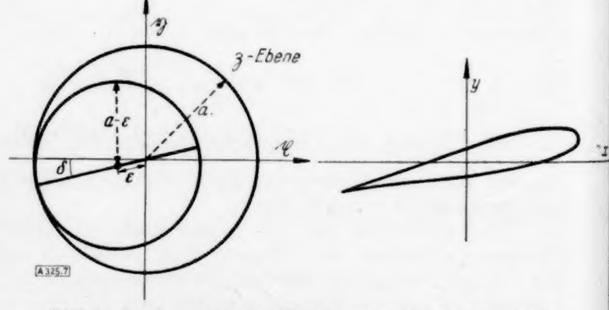


Bild 7. Joukowskiprofil, Kreisebene bzw. Strömungsebene.

Bild 4b (links). Differenz der aus der kompressiblen und inkompressiblen Übergeschwindigkeit berechneten kritischen Anströmgeschwindigkeit bei der Ellipse.

2. Nichtangestelltes Kreiszweieck.

Den Einfluß der Dicke haben wir noch an dem Beispiel des nichtangestellten Kreiszweieckes ermittelt. Die Abbildungsfunktion, die den Kreis $r = a$ in der $\mathfrak{z}$-Ebene auf das zur ξ- und η-Achse symmetrische Kreiszweieck in der ζ-Ebene mit dem Kantenwinkel δ und der Tiefe $n\,a \left(n = 2 - \frac{\delta}{\pi}\right)$ abbildet, ist durch

$$\frac{\zeta - n\,a}{\zeta + n\,a} = \left(\frac{\mathfrak{z} - a}{\mathfrak{z} + a}\right)^n$$

gegeben. Das senkrecht zur Anströmrichtung affin verzerrte Kreiszweieck wurde wieder durch ein Kreiszweieck approximiert. Wir können dies mit der gleichen Berechtigung wie beim nichtangestellten Kreisbogen tun. Die Rechnung führen wir hier nicht näher aus, sondern geben nur das Ergebnis an. Bezeichnen wir mit τ das Verhältnis $\frac{\text{Dicke}}{\text{Tiefe}}$, so erhält man für die Maximalgeschwindigkeit am Kreiszweieck bis zu den quadratischen Gliedern in τ genau:

$$-\frac{u_{\max}}{U} = 1 + \frac{4}{\pi}\tau\mu + \tau^2\left[\left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right) + \left(\frac{20}{\pi^2} - 1\right)\alpha^2\mu^2 + \left(\frac{5}{\pi^2} - \frac{1}{4}\right)(\varkappa + 1)\,\alpha^4\mu^4\right].$$

In Bild 5 ist für $\tau = \frac{1}{10}$ die Maximalgeschwindigkeit in erster und zweiter Näherung angegeben. Die Übergeschwindigkeiten für eine Ellipse mit dem gleichen Dickenverhältnis liegen etwas tiefer (Bild 3). Dies ist aber inkompressibel schon der Fall. Vergleicht man das Kreiszweieck mit einer Ellipse, deren Dicke so gewählt ist, daß die inkompressiblen Übergeschwindigkeiten bis zu den Gliedern in τ^2 gleich werden, so zeigt sich auch für höhere Machsche Zahlen eine sehr gute Übereinstimmung, ein Ergebnis, das von vornherein nur für die Prandtlsche Näherung zu erwarten ist.

In Bild 6 ist weiter der Eintritt der Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Dicke des Kreiszweiecks angegeben. Zum Vergleich ist noch die entsprechende Kurve für die dünne nichtangestellte Ellipse eingezeichnet.

c) Einfluß des Anstellwinkels (angestelltes Joukowskiprofil).

Zur Ermittlung des Anstellwinkeleinflusses haben wir für das angestellte symmetrische Joukowskiprofil in Parallelströmung die durch die Kompressibilität bedingte Auftriebsänderung untersucht. Das durch die affine Verzerrung (14) aus einem Joukowskiprofil hervorgehende Profil wurde dabei wieder durch ein Joukowskiprofil approximiert.

Ein angestelltes Joukowskiprofil ist charakterisiert durch die aus Bild 7 ersichtlichen Parameter: a (Radius des umströmten Kreises), δ (Anstellwinkel), ε (Verschiebung des Mittelpunktes des Einheitskreises gegen den des Stromkreises). Um die zweite Näherung für die Strömung um dieses Profil zu erhalten, nähern wir das nach (14) affin verzerrte Joukowskiprofil wieder durch ein solches an, dessen Parameter a', δ', ε' seien. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} a' &= a - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \\ \delta' &= \frac{\delta}{\mu} \\ \varepsilon' &= \frac{\varepsilon}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

so stimmt das Näherungsprofil in den linearen Gliedern in ε und δ mit dem verzerrten Profil überein. (Von der Abweichung in den quadratischen Gliedern könnte u. U. noch das Glied in $\varepsilon\,\delta$ in (42) einen Zusatzterm in ε geben. Nach (43) ist dieser sicher von mindestens der Größenordnung α^4.) Wir führen die Berechnung zunächst in $a', \delta', \varepsilon'$ durch und schreiben das Ergebnis dann auf a, δ, ε um. Da wir hier bei festem a' zwei Parameter ε' und δ' haben, denken wir uns diese zur Durchführung unseres Verfahrens linear an λ gekoppelt $\varepsilon' = \varepsilon_1\lambda$, $\delta' = \delta_1\lambda$ und die Stromfunktion nach λ entwickelt.

Das komplexe Potential $U\,W$ für die Strömung um ein Joukowskiprofil der Parameter $a', \delta', \varepsilon'$ bei der Anströmgeschwindigkeit $-U$ ist

$$U\,W = -U\left(\mathfrak{z} + \frac{a'^2}{\mathfrak{z}}\right) - 2\,U\,a'\,i\sin\delta' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

wobei die Abbildungsfunktion $\zeta(\mathfrak{z})$ die Gestalt:

$$\zeta(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \frac{(a'-\varepsilon')^2 e^{i\delta'}}{\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} + \varepsilon'} \quad \text{(39)}$$

hat. Aus (38) und (39) ergibt sich β zu:

$$\beta = 1 - \frac{(\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} + \varepsilon')^2}{\mathfrak{z}^2} \cdot \frac{\mathfrak{z}\, e^{i\delta'} - a'}{\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} - a' + 2\varepsilon'} \quad \text{(40).}$$

Damit nehmen $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ die Werte an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{K^{(1)}}{U} &= \Im\mathrm{m}\left[-\left(\mathfrak{z} + \frac{a'^2}{\mathfrak{z}}\right) - 2a'\, i\,\delta' \ln \mathfrak{z}\right] \\
\frac{K^{(2)}}{U} &= \frac{K^{(1)}}{U} + \left[\frac{a^2\mu^2}{2} + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{8}\right] \Im\mathrm{m}\left[-\frac{a'^2}{\mathfrak{z}} - 2a'\, i\,\delta' \ln\mathfrak{z} + \frac{(a'-\varepsilon')^2 e^{i\delta'}}{\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} + \varepsilon'}\right] \cdot \\
&\quad \left[1 - \frac{(\bar{\mathfrak{z}}\, e^{i\delta'} + \varepsilon')^2}{\bar{\mathfrak{z}}^2} \cdot \frac{\bar{\mathfrak{z}}\, e^{-i\delta'} - a'}{\bar{\mathfrak{z}}\, e^{i\delta'} - a' + 2\varepsilon'}\right] + \frac{a^4\mu^4}{16}(\varkappa+1)\, \Im\mathrm{m}\left[\mathfrak{z} + \frac{(a'-\varepsilon')^2 e^{i\delta'}}{\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} + \varepsilon'}\right] \cdot \\
&\quad \left[1 - \frac{(\bar{\mathfrak{z}}\, e^{i\delta'} + \varepsilon')^2}{\bar{\mathfrak{z}}^2} \cdot \frac{\bar{\mathfrak{z}}\, e^{-i\delta'} - a'}{\bar{\mathfrak{z}}\, e^{i\delta'} - a' + 2\varepsilon'}\right]^2 + \Im\mathrm{m}\left[F(\mathfrak{z}) + G(\bar{\mathfrak{z}})\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{(41).}$$

Wählt man zur Erfüllung der Randbedingung $K^{(2)} = \text{const}$ auf dem Stromkreise nach dem Verfahren von S. 78 die Funktion von $\bar{\mathfrak{z}}$, so tritt ein Glied $\dfrac{g(\bar{\mathfrak{z}})}{\bar{\mathfrak{z}} + \dfrac{a'^2 e^{-i\delta'}}{\varepsilon'}}$ $\left(g(\bar{\mathfrak{z}}) \text{ ist im Punkte } -\dfrac{a'^2 e^{-i\delta'}}{\varepsilon'} \text{ regulär}\right)$ und damit ein Pol im Außengebiet des Kreises auf. Durch Hinzufügen von

$$g\left(-\frac{a'^2 e^{-i\delta'}}{\varepsilon'}\right)\left\{-\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}} + \dfrac{a'^2 e^{-i\delta'}}{\varepsilon'}} + \frac{1}{a'^2}\,\frac{\mathfrak{z}\,\varepsilon'}{\mathfrak{z}\, e^{-i\delta'} + \varepsilon'}\right\}$$

wird dieser aber beseitigt. Da wir uns auf den Auftrieb beschränken, genügt uns nach dem Anhang die Kenntnis der Vorzahl des Gliedes in $\ln r$ der Funktion $K^{(2)}$ in der $\mathfrak{z}$-Ebene. Der Auftrieb und damit diese Vorzahl ist aber sicher eine ungerade Funktion in δ', enthält also nur Glieder in $\delta', \varepsilon'\delta', \ldots$ usw. Wir brauchen also in (41) nur die Glieder in δ' und $\varepsilon'\delta'$ zu bestimmen. Die Vorzahl A von $\Im\mathrm{m}[i \ln \mathfrak{z}]$ ergibt sich dann aus der Forderung, daß der Punkt $\mathfrak{z} = -a'\, e^{i\delta'}$ Staupunkt werden soll zu

$$A = -2a'\delta' - \left[2a^2\mu^2 + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{2}\right]\delta'\varepsilon'.$$

Mit (37) wird daraus:

$$A = -\frac{2a\delta}{\mu} + \frac{2\varepsilon\delta}{\mu}\left[1 - \frac{1}{\mu}\right] - \left[2a^2\mu^2 + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{2}\right]\frac{\delta\varepsilon}{\mu^2}.$$

Für das Verhältnis der Zirkulation Γ_k der kompressiblen zu Γ_i der inkompressiblen Strömung erhält man dann nach Formel (8) des Anhanges:

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_i} = \frac{-2a\delta\mu + 2\varepsilon\delta[\mu - 1] - \left[2a^2\mu^2 + \dfrac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{2}\right]\delta\varepsilon}{-2a\delta}$$

also $\left(\text{bis zum linearen Glied in } \dfrac{\varepsilon}{a} \text{ genau}\right)$:

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_i} = \mu + \frac{\varepsilon}{a}\left\{1 - \mu + a^2\mu^2 + \frac{a^4\mu^4(\varkappa+1)}{4}\right\} \quad \text{(42).}$$

$\dfrac{\varepsilon}{a}$ ist bis auf einen Faktor angenähert das Dickenverhältnis:

$$d = \frac{\text{Dicke}}{\text{Tiefe}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,\frac{\varepsilon}{a}.$$

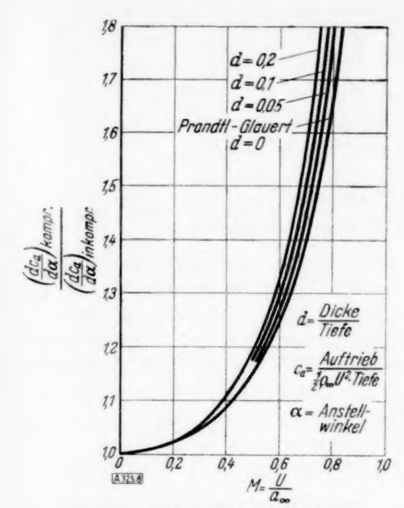


Bild 8. Auftrieb des symmetrischen Joukowskiprofiles bei kleinem Anstellwinkel und kleiner Dicke.

Das Verhältnis $\frac{\Gamma_k}{\Gamma_i}$ hat Kaplan[5]), der nach Rayleigh-Poggi (Entwicklung nach der Machschen Zahl) vorging, für dünne Profile zu:

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_i} = 1 + \frac{1 + \frac{\varepsilon}{a}}{2}\,\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

angegeben. Dies ist das erste Glied der Entwicklung (42) nach α. In Bild 8 ist der Ausdruck (42) für verschiedene Dickenverhältnisse d in Abhängigkeit der Machschen Zahl aufgetragen. Die Kurve $d = 0$ entspricht der Prandtlschen Auftriebsformel:

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_i} = \mu .$$

Die Berechnung des zweiten Schrittes unseres Näherungsverfahrens zeigt in allen Beispielen, daß der Kompressibilitätseinfluß durch Dicke, Wölbung und Anstellwinkel gegenüber der Prandtlschen Näherung noch etwas ansteigt.

Anhang.

Berechnung des Auftriebes aus der Stromfunktion.

Die Stromfunktion hatte in der zweiten Näherung bei den vorhergehenden Rechnungen mit $\mathfrak{z} = r\,e^{i\varphi}$ für große r eine Gestalt, die sich der Form:

$$\frac{K}{U} = -\mathfrak{y} + A \ln r + \sum_m \frac{a_m}{r^m} + \sum_{n,k} b_{nk} \frac{(\ln r)^k}{r^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

unterordnen läßt. Dabei seien a_m und b_{nk} Funktionen von φ, außerdem gehen in sie wie auch in die Konstante A die das Profil charakterisierenden Parameter $a, \delta, \varepsilon, d, f$ usw. und die Machsche Zahl α ein. m, n und k sind ganze Zahlen $\geqq 1$.

Die Funktion $\chi(\xi, \eta) = K(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ wird, da die Abbildung $\zeta = f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \frac{c_1}{\mathfrak{z}} + \frac{c_2}{\mathfrak{z}^2} + \cdots$ ($c_1, c_2 \cdots$ Konstante) das Unendliche unverändert läßt, wieder die Form (1) haben. Mit $\zeta = \bar{r}\,e^{i\vartheta}$ ergibt sich:

$$\frac{\chi}{U} = -\eta + A \ln \bar{r} + \sum_m \frac{\bar{a}_m}{\bar{r}^m} + \sum_{n,k} \frac{\bar{b}_{nk}(\ln \bar{r})^k}{\bar{r}^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Abbildung $\eta = \frac{y}{\mu}$, $\xi = x$ gibt zwischen den Polarkoordinaten $\bar{r}, \vartheta$ der $\xi\eta$-Ebene und R, Φ der xy-Ebene die Beziehungen:

$$\bar{r} = R\sqrt{\cos^2\Phi + \frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\Phi .$$

Damit nimmt $\Psi(x, y) = \mu\,\chi(\xi, \eta)$ die Gestalt an:

$$\frac{\Psi}{U} = -y + \mu\,A \ln\left[R\sqrt{\cos^2\Phi + \frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}}\right] + \sum_m \frac{\bar{\bar{a}}_m}{R^m} + \sum_{n,k} \frac{\bar{\bar{b}}_{nk}(\ln R)^k}{R^n} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei die $\bar{\bar{a}}_m$ und $\bar{\bar{b}}_{nk}$ Funktionen von Φ sind.

Aus dem Ausdruck (3) berechnen wir nun die Komponenten der Stromdichte. Deutet man die Glieder durch Punkte an, die im Unendlichen mit höherer Ordnung als $\frac{1}{R}$ Null werden, so erhält man:

---

[5]) C. Kaplan: Compressible flow about symmetrical Joukowski profiles. NACA Rep. 621 (1938), S. 8.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{U}\frac{\partial\Psi}{\partial y}&=\frac{\varrho u}{\varrho_\infty U}=-1+\frac{\mu A\sin\Phi}{R}-\frac{a^2\mu A\cos^2\Phi\sin\Phi}{R\left[\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}\right]}+\cdots\\ \frac{1}{U}\frac{\partial\Psi}{\partial x}&=-\frac{\varrho v}{\varrho_\infty U}=\frac{\mu A\cos\Phi}{R}+\frac{a^2\mu A\cos\Phi\sin^2\Phi}{R\left[\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}\right]}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(4).$$

Die Dichte $\frac{\varrho}{\varrho_\infty}$ ergibt sich aus der Stromdichte $\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2=\left(\frac{\varrho u}{\varrho_\infty U}\right)^2+\left(\frac{\varrho v}{\varrho_\infty U}\right)^2$ nach der aus Gl. (3) von § 1 folgenden Entwicklung nach $1-\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2$:

$$\frac{\varrho_\infty}{\varrho}=1+\frac{a^2\mu^2}{2}\left[\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2-1\right]+\frac{a^4\mu^4}{8}[(\varkappa+1)\mu^2+3]\left[\left(\frac{D}{D_\infty}\right)^2-1\right]^2+\cdots$$

zu

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty}=1+a^2\mu^2\left[\frac{\mu A\sin\Phi}{R}-\frac{a^2\mu A\cos^2\Phi\sin\Phi}{R\left[\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}\right]}\right]+\cdots\quad\ldots\ldots\quad(5).$$

Nach dem Adiabatengesetz erhält man schließlich für den Druck $\frac{p}{p_\infty}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right)^\varkappa$:

$$\frac{p}{p_\infty}=1+\varkappa a^2\mu^2\left[\frac{\mu A\sin\Phi}{R}-\frac{a^2\mu A\cos^2\Phi\sin\Phi}{R\left[\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}\right]}\right]+\cdots\quad\ldots\ldots\quad(6).$$

Legt man in der xy-Ebene einen großen Kreis $R=C$ um das Profil und wendet auf die Flüssigkeitsmenge im Kreise den Impulssatz an, so findet man für den Auftrieb P des Profiles:

$$P=\int p\,\mathrm{d}x=\oint[p\cos(n\,y)+\varrho v(u\cos(n\,x)+v\cos(n\,y))]\,\mathrm{d}s\quad\ldots\ldots\quad(7),$$

wobei das Integral über den Kreis $R=C$ zu erstrecken ist. $\cos(n\,x)$ und $\cos(n\,y)$ sind die Richtungskosinus der inneren Normalen, $\mathrm{d}s$ das Linienelement auf dem Kreis.

Die rechte Seite von (7) nimmt nun mit (4), (5) und (6) für $R\to\infty$ die Form an:

$$\begin{aligned}P=&-p_\infty\varkappa a^2\mu^3 A\int_0^{2\pi}\left[\sin^2\Phi-\frac{a^2\cos^2\Phi\sin^2\Phi}{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}}\right]\mathrm{d}\Phi\\ &-\varrho_\infty U^2\mu A\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\Phi+\frac{a^2\cos^2\Phi\sin^2\Phi}{\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}}\right]\mathrm{d}\Phi.\end{aligned}$$

Mit $a^2\cdot p_\infty\varkappa=a^2\varrho_\infty a_\infty^2=\varrho_\infty U^2$ wird daraus:

$$P=-\varrho_\infty U^2\mu A\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\left(\cos^2\Phi+\frac{\sin^2\Phi}{\mu^2}\right)},$$

was ausgewertet:

$$P=-\varrho_\infty U^2\mu A\cdot 2\pi\mu\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

gibt. Setzt man $P=-\varrho_\infty U\Gamma$ (Γ Zirkulation), so hat man:

$$\Gamma=2\pi U\mu^2\cdot A\quad\ldots\ldots\quad(8).$$

Man sieht daraus, daß bei einer Stromfunktion der Form (1) (bzw. (3)) nur die Konstante bei dem Glied mit $\ln r$ in den Auftrieb eingeht.

Eine Anwendung des absoluten Parallelismus auf die Schalentheorie.

Von *F. Reutter* in Karlsruhe.

Nach einer kurzen Entwicklung der Theorie des absoluten Parallelismus werden mittels dieses mathematischen Apparates die Gleichgewichtsbedingungen für das deformierte Schalenelement aufgestellt und anschließend insbesondere die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der deformierten Schalenmittelfläche errechnet.

Der absolute Parallelismus ist eine verhältnismäßig junge mathematische Entdeckung und hat bisher in erster Linie in der (mehrdimensionalen) höheren Differentialgeometrie Anwendung gefunden. Die vorliegende Arbeit hat nun das Ziel, die Grundgleichungen der Schalentheorie mittels des mathematischen Apparates des absoluten Parallelismus herzuleiten. Es handelt sich um die Beantwortung folgender Fragen:

1. Wann ist eine durch ihre Mittelfläche gegebene Schale unter der Einwirkung bestimmter äußerer Kräfte und Momente im Gleichgewicht, d. h. welche Spannungsresultanten und -momente stellen sich ein?
2. Welche Deformation erleidet die Mittelfläche der Schale?

Damit Gleichgewicht besteht, muß die Resultierende der an den Seiten eines Flächenelements der Mittelfläche angreifenden Kräfte und Momente einschließlich der äußeren Kräfte und Momente der Nullvektor sein. Zwecks Ermittlung der Resultierenden sind diese Kräfte und Momente durch eine Parallelverschiebung in denselben Angriffspunkt zu verlegen. Für eine Platte ist diese Parallelverschiebung trivial und für eine Schale mit gekrümmter Mittelfläche läßt sie sich im euklidischen Raum durchführen. Dennoch gelangt man, wie wir hier zeigen wollen, erst dann zu einer organischen Entwicklung der Grundlagen der Schalentheorie, wenn man sich des absoluten Parallelismus (auf der Mittelfläche der Schale) bedient. Auf diesem Wege ergeben sich auch die Fundamentalgrößen der deformierten Mittelfläche wesentlich leichter als bei der von Love durchgeführten Herleitung[1]) mittels beweglicher Koordinatensysteme auf der Mittelfläche und in größerer Allgemeinheit als bei der von Trefftz[2]) gegebenen Herleitung mittels des Castiglianoschen Prinzips. Der hier angewandte mathematische Apparat ist zwar komplizierter, läßt aber die wesentlichen Gedankengänge klar hervortreten.

Die Abhandlung zerfällt in drei Teile. Die Theorie des absoluten Parallelismus wird im Abschnitt I entwickelt und im Abschnitt II zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen benutzt. Der Abschnitt III behandelt die Deformation der Mittelfläche.

I. Der absolute Parallelismus.

1. Durch einen Punkt P der Ebene sei eine Gerade g gelegt. In der euklidischen Geometrie gibt es dann durch einen beliebigen Punkt P' der Ebene eine und nur eine Parallele g' zu g. Dieser Begriff des Parallelismus kann sofort auf alle Flächen vom Krümmungsmaß Null übertragen werden, also — außer der Ebene — die Kegel, Zylinder und die Tangentenflächen beliebiger Raumkurven, die Torsen. Die ∞^1 Erzeugenden einer Torse (Bild 1) sind bekanntlich zugleich die ∞^1 Schnittgeraden ihrer ∞^1 aufeinanderfolgenden Tangentialebenen; indem man nacheinander diese Tangentialebenen um ihre Schnittgeraden dreht, wird die Torse auf die Ebene abgewickelt. Daher heißt ein Vektor $\mathfrak{t}$ in der Tangentialebene des Punktes P einer Torse zu einem Vektor $\mathfrak{t}'$ in der Tangentialebene des Punktes P' parallel, wenn nach Abwicklung der Fläche in eine Ebene die Bilder $\bar{\mathfrak{t}}$ und $\bar{\mathfrak{t}}'$ der beiden Vektoren euklidisch parallel sind und wenn $|\mathfrak{t}| = |\bar{\mathfrak{t}}| = |\mathfrak{t}'| = |\bar{\mathfrak{t}}'|$.

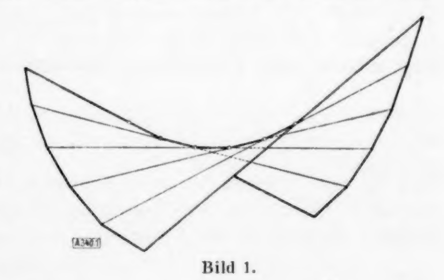


Bild 1.

Jetzt sei eine Fläche Φ vom Krümmungsmaß $K \neq 0$ gegeben. P und P' seien zwei Flächenpunkte. Der Vektor $\mathfrak{t}$ in der Tangentialebene des Punktes P soll nach dem Punkte P' parallel verschoben werden. Dazu verbindet man P mit P' durch eine beliebige reguläre oder wenigstens stückweise glatte Flächenkurve C. In allen Punkten von C werden die Tangential-

[1]) Love: Lehrbuch der Elastizität, deutsch v. A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, § 326.

[2]) Trefftz: Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit dem Castiglianoschen Prinzip, Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 101 bis 108.

ebenen an die Fläche Φ konstruiert. Die Einhüllende dieser einparametrigen Ebenenschar ist eine Torse T, die die Fläche Φ längs C berührt. Der absolute Parallelismus auf der Fläche Φ wird jetzt nach Levi-Civita[3]) mit Hilfe des Parallelismus auf der Torse T so definiert:

Ein Vektor $\mathfrak{t}$ in der Tangentialebene des Flächenpunktes P und ein Vektor $\mathfrak{t}'$ in der Tangentialebene des Punktes P' sind auf der Fläche Φ in bezug auf die Kurve C parallel, wenn die beiden Vektoren auf der der Fläche Φ längs C umschriebenen Torse T parallel sind. Die Lage des Vektors $\mathfrak{t}'$ hängt also von der Verschiebungskurve C ab. Wird die Parallelverschiebung einmal längs einer Kurve C_1, das andere Mal längs einer Kurve C_2 vorgenommen, so erhält man in P' i. a. zwei voneinander verschiedene Vektoren $\mathfrak{t}'_1$, $\mathfrak{t}'_2$; sie haben zwar gleiche Länge, schließen aber einen von den Krümmungsverhältnissen von Φ abhängigen Winkel $\varphi \neq 0$ ein. Denn die der Fläche Φ längs der Flächenkurve C_1 umschriebene Torse T_1 ist mit der Φ längs C_2 umschriebenen Torse T_2 dann und nur dann identisch, wenn Φ das Krümmungsmaß Null hat; dann gilt sogar $T_1 = T_2 = \Phi$. Auf Flächen vom Krümmungsmaß Null ist die Parallelverschiebung vom Verschiebungswege unabhängig.

2. Wir wollen nun aus den Komponenten des Vektors $\mathfrak{t}$ bei gegebener Fläche Φ und Verschiebungskurve C die Komponenten des parallel verschobenen Vektors $\mathfrak{t}'$ berechnen.

Die Fläche Φ sei in vektorieller Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2)$$

gegeben, die Flächenkurve C habe die Parameterdarstellung

$$u_1 = u_1(s), \quad u_2 = u_2(s).$$

$P(u_1(s), u_2(s))$ und $P'(u_1(s+ds), u_2(s+ds))$ seien zwei benachbarte Punkte von C, τ und τ' ihre Tangentialebenen mit der Schnittgeraden g (Bild 2). $\mathfrak{d}$ ist ein Vektor in der Richtung von g. Der Vektor $\mathfrak{t}$ mit dem Anfangspunkte P in τ soll durch die Parallelverschiebung in den Vektor $\mathfrak{t}'$ mit dem Anfangspunkte P' in τ' übergehen. $\mathfrak{x}_{u_1}$ und $\mathfrak{x}_{u_2}$ sind die Tangentenvektoren an die Parameterlinien der Fläche im Punkte $P(u_1, u_2)$. Nach Nr. 1 soll $|\mathfrak{t}| = |\mathfrak{t}'|$ sein oder auch

Bild 2.

$$(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t}) = (\mathfrak{t}' \cdot \mathfrak{t}') \qquad (1).$$

Dreht man die Tangentialebene τ' um g, bis sie mit der Ebene τ zusammenfällt, so müssen nach Nr. 1 die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ euklidisch parallel sein. Daher gilt weiter:

$$(\mathfrak{t}' \cdot \mathfrak{d}) = (\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{d}) \qquad (2).$$

Umformung von (1) und (2) liefert:

$$(\mathfrak{t}' + \mathfrak{t},\ \mathfrak{t}' - \mathfrak{t}) = 0,$$
$$(\mathfrak{d},\ \mathfrak{t}' - \mathfrak{t}) = 0.$$

Wegen

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(s) = t_1(s)\,\mathfrak{x}_{u_1} + t_2(s)\,\mathfrak{x}_{u_2} \qquad (3),$$
$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(s) = d_1(s)\,\mathfrak{x}_{u_1} + d_2(s)\,\mathfrak{x}_{u_2} \qquad (4)$$

folgt weiter nach Ausführung des Grenzübergangs $ds \to 0$ mit $\dot{\mathfrak{t}} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}$:

$$(\mathfrak{t}\,\dot{\mathfrak{t}}) = 0 \qquad (5),$$
$$(\mathfrak{d}\,\dot{\mathfrak{t}}) = 0 \qquad (6).$$

Dies ist ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Komponenten $t_1(s)$, $t_2(s)$ des Vektors $\mathfrak{t}$. Unter Benutzung des aus (3) folgenden Wertes für $\dot{\mathfrak{t}}$ nehmen (5) und (6) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} t_1 Q_1 + t_2 Q_2 &= 0 \\ d_1 Q_1 + d_2 Q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

mit

$$Q_i = \dot{t}_i\,\mathfrak{x}_{u_i}^2 + \dot{t}_k\,\mathfrak{x}_{u_i}\mathfrak{x}_{u_k} + t_i(\mathfrak{x}_{u_i}\mathfrak{x}_{u_i u_i}\dot{u}_i + \mathfrak{x}_{u_i}\mathfrak{x}_{u_i u_k}\dot{u}_k) + t_k(\mathfrak{x}_{u_i}\mathfrak{x}_{u_k u_i}\dot{u}_i + \mathfrak{x}_{u_i}\mathfrak{x}_{u_k u_k}\dot{u}_k)$$
$$(i = 1,\ k = 2;\ \ i = 2,\ k = 1).$$

[3]) Levi-Civita: Nozione di parallelismo, Rendiconti di Palermo, Bd. 42 (1917). (1. Veröffentlichung) — Der absolute Differentialkalkül, Deutsch v. A. Duschek, Berlin 1928, S. 35 ff. — Bezüglich der hier gegebenen Ableitung vergleiche außerdem: Komerell: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, Berlin und Leipzig 1931, Bd. II, S. 43. Kruppa: Zur geodätischen Krümmung und Parallelverschiebung, Jahresber. der Deutschen Math. Vereinig. Bd. 37 (1928), S. 257.

Fällt $\mathfrak{t}$ nicht in die Richtung von $\mathfrak{d}$ [4]), so ist

$$\begin{vmatrix} t_1, & t_2 \\ d_1, & d_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Daher gestattet das System (7) nur die triviale Lösung

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Die Auflösung von (8) nach $\dot{t}_1(s)$, $\dot{t}_2(s)$ liefert:

$$\left. \begin{aligned} -\dot{t}_1 &= (\Gamma^1_{11}\dot{u}_1 + \Gamma^1_{21}\dot{u}_2)\,t_1 + (\Gamma^1_{12}\dot{u}_1 + \Gamma^1_{22}\dot{u}_2)\,t_2 \\ -\dot{t}_2 &= (\Gamma^2_{11}\dot{u}_1 + \Gamma^2_{21}\dot{u}_2)\,t_1 + (\Gamma^2_{12}\dot{u}_1 + \Gamma^2_{22}\dot{u}_2)\,t_2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Hier bedeuten $\Gamma^i_{\varkappa\lambda}$ die Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art, aus der Differentialgeometrie bekannte Linearkombinationen der metrischen Fundamentalgrößen der Fläche Φ, $E = (\mathfrak{x}_{u_1}\mathfrak{x}_{u_1})$, $F = (\mathfrak{x}_{u_1}\mathfrak{x}_{u_2})$, $G = (\mathfrak{x}_{u_2}\mathfrak{x}_{u_2})$ und ihrer Ableitungen.

Die Gln. (9) können auch geschrieben werden:

$$-\frac{d t_i}{d s} = \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\Gamma^i_{\varkappa\lambda} \frac{d u_\lambda}{d s} \right) t_\varkappa(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Bei gegebener Fläche Φ und Verschiebungskurve C sind die $\left(\Gamma^i_{\varkappa\lambda} \frac{d u_\lambda}{d s} \right)$ bekannte Größen; die Gln. (10) sind daher ein System linearer homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung für die unbekannten Funktionen $t_k(s)$, aus dem sich zu irgendwelchen Anfangswerten t^0_k in einem Flächenpunkte $P(u_i(s))$ die Komponenten $t_k(s)$ des parallelverschobenen Vektors in allen Punkten der Verschiebungskurve C bestimmen lassen. Die Gln. (10) gelten für Mannigfaltigkeiten M_n beliebiger Dimensionszahl n. Da die Koeffizienten der Gln. (10) nur von den metrischen Fundamentalgrößen der M_n und der Gleichung der Verschiebungskurve abhängen, ist der absolute Parallelismus eine Richtungsübertragung, die allein durch die Metrik der M_n bestimmt ist und in keiner Weise von ihrer Lage in einem Einbettungsraum abhängt.

II. Die Gleichgewichtsbedingungen.

3. Eine Schale wird durch zwei gekrümmte Flächen F_1, F_2 begrenzt. Deren Abstand $2h$, die Schalendicke, ist gering gegen ihre sonstigen Abmessungen, kann im übrigen aber beliebig veränderlich sein. Diejenige zwischen F_1, F_2 liegende Fläche Φ, die überall die Schalendicke halbiert, wird Mittelfläche genannt. Durch Vorgabe der (undeformierten) Mittelfläche Φ mit der Vektorgleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$$

und der Schalendicke $2h$ für jeden Punkt von Φ ist die Schale geometrisch bestimmt.

Unter der Einwirkung äußerer Kräfte mögen die Punkte der Schale gewisse Verschiebungen aus ihrer ursprünglichen Lage erfahren. Diese Verschiebungen — $\bar{u}$ in der Richtung $\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}}$, $\bar{v}$ in der Richtung $\frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{G}}$, $\bar{w}$ in Richtung $\mathfrak{v} = \frac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$ — sollen gegen die Schalendicke $2h$ so klein sein, daß die Produkte der Verschiebungsgrößen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und ihrer partiellen örtlichen Ableitungen vernachlässigt werden können. Zur Kennzeichnung des Spannungszustandes der Schale dienen statt der auf die Flächeneinheit eines Schnittes bezogenen Spannungen die Resultanten der über die ganze Schalendicke verteilten Spannungen und Spannungsmomente.

Es sei C eine Kurve auf der Mittelfläche der deformierten Schale mit der Parameterdarstellung $u = u(s)$, $v = v(s)$, $\mathfrak{t}$ ihr Tangentenvektor im Punkte $P(s)$, $\bar{\mathfrak{v}}$ die Flächennormale im Punkte P mit $|\mathfrak{t}| = |\bar{\mathfrak{v}}| = 1$ und $\mathfrak{n} = [\mathfrak{t}\,\bar{\mathfrak{v}}]$. Durch $\mathfrak{t}$ werde ein Normalschnitt der deformierten Mittelfläche gelegt und in der Normalschnittebene ein Flächenstück begrenzt durch $\bar{\mathfrak{v}}$ und den Normalenvektor $\bar{\mathfrak{v}}_1$ im Punkte P_1 der Normalschnittkurve σ (Bild 3). Die auf das schraffierte Flächenstück in Bild 3 wirkende Spannung läßt sich bei hinreichend kleinem Kurvenbogen $PP_1 = d\sigma$ durch eine Kraft und ein Kräftepaar in $P(s)$ darstellen; beide werden in Komponenten nach dem System $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ zerlegt. Division durch $d\sigma$ und der Grenzübergang $P_1 \to P$, also $d\sigma \to 0$ liefert die auf die Kurve C bezogenen Spannungsresultanten und Spannungsmomente, die auch mit Hilfe der Komponenten des Spannungstensors durch Integration über die Dicke der Schale dargestellt werden können

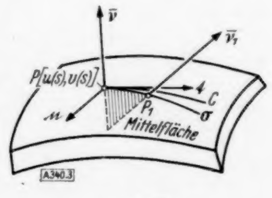


Bild 3.

[4]) Fällt $\mathfrak{t}$ in die Richtung von $\mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{t}'$ mit $\mathfrak{t}$ schon euklidisch parallel. In der Grenze geht die Richtung von $\mathfrak{d}$ in die zur Tangentenrichtung an die Verschiebungskurve „konjugierte Richtung" über.

(Nr. 4, Gln. 11); der Grenzwert für die $\bar{\nu}$-Komponente des Kräftepaares verschwindet immer. Statt der Bezeichnungen: „Spannungsresultante" und „Spannungsmoment" werden in der Literatur vielfach die Bezeichnungen: „Schnittkraft" und „Schnittmoment" gebraucht.

4. Die Parameterlinien der undeformierten Mittelfläche seien Krümmungslinien. Diese bilden ein orthogonales Netz, so daß $F=0$ (Nr. 2). Die undeformierte Mittelfläche ist daher durch Angabe von E, G und der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$L=\frac{(\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v)}{\sqrt{EG}},\qquad N=\frac{(\mathfrak{x}_{vv}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v)}{\sqrt{EG}},\qquad M=0$$

charakterisiert.

Wir nehmen an, daß die Dehnung der Mittelfläche bei der elastischen Deformation der Schale so klein ist, daß sie bei der Ermittlung der Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden kann. Dann geht das Netz der Krümmungslinien infolge der Deformation in ein Kurvennetz über, das mit hinreichender Annäherung weiterhin als ein Rechtwinkelnetz angesehen werden kann, aber wegen der bei der Deformation eintretenden Verbiegung nicht mehr aus Krümmungslinien besteht. Die deformierte Mittelfläche mit der Vektordarstellung

$$\bar{\mathfrak{x}}=\bar{\mathfrak{x}}(u,v)$$

kann daher angenähert durch die alten metrischen Fundamentalgrößen E, G, aber neue Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$\bar{L}=\frac{(\bar{\mathfrak{x}}_{uu}\,\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v)}{\sqrt{EG}},\qquad \bar{M}=\frac{(\bar{\mathfrak{x}}_{uv}\,\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v)}{\sqrt{EG}},\qquad \bar{N}=\frac{(\bar{\mathfrak{x}}_{vv}\,\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v)}{\sqrt{EG}}$$

charakterisiert werden. Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente werden jetzt auf das System

$$\frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{\sqrt{E}},\qquad \frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{\sqrt{G}},\qquad \bar{\nu}=\frac{[\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v]}{\sqrt{EG}}$$

bezogen. Im Punkte $P(u,v)$ der Mittelfläche seien die zur v-Linie gehörenden Spannungsresultanten mit

$$T_1,\ S_1,\ N_1,$$

die zur u-Linie gehörenden mit

$$-S_2,\ T_2,\ N_2$$

bezeichnet, die Spannungsmomente mit

$$H_1,\ G_1\ \text{bzw.}\ -G_2,\ H_2.$$

Ist

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23}\\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3\end{pmatrix}$$

der Spannungstensor, bezogen auf das System $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{\sqrt{E}}$, $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{\sqrt{G}}$, $\bar{\nu}$ [5]), so gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&T_1=\int_{-h}^{+h}\sigma_1\left(1-\frac{z\cdot G}{\bar{N}}\right)dz,\quad S_1=\int_{-h}^{+h}\tau_{12}\left(1-\frac{z\cdot G}{\bar{N}}\right)dz,\quad N_1=\int_{-h}^{+h}\tau_{13}\left(1-\frac{z\cdot G}{\bar{N}}\right)dz,\\
&H_1=-\int_{-h}^{+h}z\cdot\tau_{12}\left(1-\frac{z\cdot G}{\bar{N}}\right)dz,\quad G_1=\int_{-h}^{+h}z\cdot\sigma_1\left(1-\frac{z\cdot G}{\bar{N}}\right)dz,\\
&T_2=\int_{-h}^{+h}\sigma_2\left(1-\frac{z\cdot E}{\bar{L}}\right)dz,\quad S_2=-\int_{-h}^{+h}\tau_{12}\left(1-\frac{z\cdot E}{\bar{L}}\right)dz,\quad N_2=\int_{-h}^{+h}\tau_{23}\left(1-\frac{z\cdot E}{\bar{L}}\right)dz,\\
&H_2=\int_{-h}^{+h}z\cdot\tau_{12}\left(1-\frac{z\cdot E}{\bar{L}}\right)dz,\quad G_2=\int_{-h}^{+h}z\cdot\sigma_2\left(1-\frac{z\cdot E}{\bar{L}}\right)dz
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(11).$$

[5]) I. a. ist noch $\sigma_3=0$ (vgl. Nr. 13, Gl. 21).

5. Die Punkte $P(u,v)$ und $R(u+du, v+dv)$ der deformierten Mittelfläche bestimmen durch ihre u- und v-Linien ein kleines Parallelogramm, gebildet aus den Kurvenstücken C_u, C_v, C_{u+du}, C_{v+dv} von der Länge $\sqrt{G}\,dv$ bzw. $\sqrt{E}\,du$ (Bild 4). Es besteht Gleichgewicht für das durch dieses Parallelogramm dargestellte Schalenelement, wenn die Resultierende der auf diese Kurvenstücke wirkenden Kräfte bzw. Momente und der äußeren Kräfte bzw. Momente der Nullvektor ist.

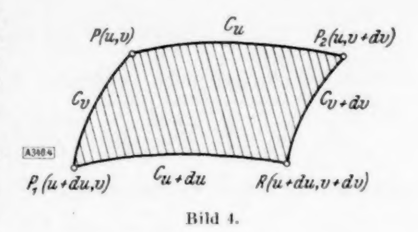


Bild 4.

Es wirken die Kräfte

$$\mathfrak{K}_1 = -\left(T_1\sqrt{\frac{G}{E}}\,\mathfrak{x}_u + S_1\mathfrak{x}_v + N_1\sqrt{G}\,\mathfrak{v}\right)dv$$

mit dem Angriffspunkt $P(u,v)$ auf das Kurvenstück C_u,

$$\mathfrak{K}_2 = \left(S_2\mathfrak{x}_u - T_2\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathfrak{x}_v + N_2\sqrt{E}\,\mathfrak{v}\right)du$$

mit dem Angriffspunkt $P(u,v)$ auf das Kurvenstück C_v,

$$\bar{\mathfrak{K}}_1 = \left[\left(T_1\sqrt{\frac{G}{E}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(T_1\sqrt{\frac{G}{E}}\right)du\right)\mathfrak{x}_u(u+du,v) + \left(S_1 + \frac{\partial}{\partial u}S_1\,du\right)\mathfrak{x}_v(u+du,v)\right.$$
$$\left. + \left(N_1\sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial u}(N_1\sqrt{G})\,du\right)\mathfrak{v}(u+du,v)\right]dv$$

mit dem Angriffspunkt $P_1(u+du,v)$ auf das Kurvenstück C_{u+du},

$$\bar{\mathfrak{K}}_2 = \left[-\left(S_2 + \frac{\partial}{\partial v}S_2\,dv\right)\mathfrak{x}_u(u,v+dv) + \left(T_2\sqrt{\frac{E}{G}} + \frac{\partial}{\partial v}\left(T_2\sqrt{\frac{E}{G}}\right)dv\right)\mathfrak{x}_v(u,v+dv)\right.$$
$$\left. + \left(N_2\sqrt{E} + \frac{\partial}{\partial v}(N_2\sqrt{E})\,dv\right)\mathfrak{v}(u,v+dv)\right]du$$

mit dem Angriffspunkt $P_2(u,v+dv)$ auf das Kurvenstück C_{v+dv}.

Die Orientierung ist so gewählt, daß $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\bar{\mathfrak{K}}_1$, $\bar{\mathfrak{K}}_2$ aus dem Schalenelement PP_1RP_2 herausweisen. Die zugehörigen Momente sind:

$$\mathfrak{M}_1 = -\left(H_1\sqrt{\frac{G}{E}}\,\mathfrak{x}_u + G_1\mathfrak{x}_v\right)dv,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left(G_2\mathfrak{x}_u - H_2\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathfrak{x}_v\right)du,$$

$$\bar{\mathfrak{M}}_1 = \left\{\left(H_1\sqrt{\frac{G}{E}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(H_1\sqrt{\frac{G}{E}}\right)du\right)\mathfrak{x}_u(u+du,v) + \left(G_1 + \frac{\partial}{\partial u}G_1\,du\right)\mathfrak{x}_v(u+du,v)\right\}dv,$$

$$\bar{\mathfrak{M}}_2 = \left\{-\left(G_2 + \frac{\partial}{\partial v}G_2\,dv\right)\mathfrak{x}_u(u,v+dv) + \left(H_2\sqrt{\frac{E}{G}} + \frac{\partial}{\partial v}\left(H_2\sqrt{\frac{E}{G}}\right)dv\right)\mathfrak{x}_v(u,v+dv)\right\}du.$$

Zur Ermittlung der Resultierenden müssen die Vektoren

$\bar{\mathfrak{K}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{M}}_1$ vom Punkte $P_1(u+du,v)$ längs C_v
nach dem Punkte $P(u,v)$,
die Vektoren $\bar{\mathfrak{K}}_2$ bzw. $\bar{\mathfrak{M}}_2$ vom Punkte $P_2(u,v+dv)$ längs C_u
nach dem Punkte $P(u,v)$

gemäß Abschnitt I parallel verschoben werden; ihre Komponenten sind damit auf das $\mathfrak{x}_u$-$\mathfrak{x}_v$-$\mathfrak{v}$-System des Punktes $P(u,v)$ bezogen. Die äußeren Kräfte und ihre Momente lassen sich bei hinreichend kleinem du, dv durch eine Kraft und ein Kräftepaar mit dem Angriffspunkt in $P(u,v)$ darstellen. Damit Gleichgewicht am Schalenelement PP_1RP_2 besteht, müssen die Komponenten der beiden Resultierenden einzeln verschwinden. Durch Grenzübergang $du \to 0$, $dv \to 0$ erhält man schließlich die Gleichgewichtsbedingungen für den Punkt $P(u,v)$.

6. Durch die Einführung der Spannungsresultanten und -momente sind zwar alle in der Schale wirkenden Kräfte und Momente durch Vektoren mit Anfangspunkt auf der Mittelfläche dargestellt, doch sind dies keine flächenmäßigen, d. h. in der Tangentialebene der Mittelfläche liegenden Vektoren. Daher muß zur Ausführung der in Nr. 5 geforderten Parallelverschiebung eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit M_3 konstruiert werden. Ist $\mathfrak{x}(u,v)$ der Ortsvektor der deformierten Mittelfläche, so hat diese M_3 die vektorielle Darstellung:

$$x(u, v, w) = \bar{\mathfrak{x}}(u, v) + w \frac{[\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v]}{\sqrt{E G}} = \bar{\mathfrak{x}}(u, v) + w \cdot \bar{\mathfrak{v}}.$$

Hieraus erhält man nach bekannten Formeln der Differentialgeometrie:

$$x_u = \left(1 - \frac{w \bar{L}}{E}\right) \bar{\mathfrak{x}}_u - \frac{w \bar{M}}{G} \bar{\mathfrak{x}}_v, \quad x_v = -\frac{w \bar{M}}{G} \bar{\mathfrak{x}}_u + \left(1 - \frac{w \bar{N}}{E}\right) \bar{\mathfrak{x}}_v, \quad x_w = \bar{\mathfrak{v}},$$

und die metrischen Fundamentalgrößen g_{ik} dieser M_3 mit

$$\begin{aligned} g_{11} &= (x_u x_u), & g_{12} &= (x_u x_v), & g_{13} &= (x_u x_w), \\ & & g_{22} &= (x_v x_v), & g_{23} &= (x_v x_w), \\ & & & & g_{33} &= (x_w x_w) = 1. \end{aligned}$$

Die Verschiebungskurven C_u, C_v (Nr. 4) liegen auf der Mittelfläche, die aus den g_{ik} zu bestimmenden Γ-Symbole (Nr. 2) werden also nur in den Punkten der Mittelfläche benötigt und in den Differentialgleichungen der Parallelverschiebung (Nr. 2, Gln. (10)) ist daher $\mathrm{d}\,w = \mathrm{d}\,u_3 = 0$. Hat der zu verschiebende Vektor $\mathfrak{t}$ im System $\bar{\mathfrak{x}}_u$, $\bar{\mathfrak{x}}_v$, $\bar{\mathfrak{v}}$ die Komponenten t_1, t_2, t_3, so lauten die Differentialgleichungen der Parallelverschiebung:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\,t_1 &= -\frac{1}{2E}(E_u\,\mathrm{d}\,u + E_v\,\mathrm{d}\,v)\,t_1 - \frac{1}{2E}(E_v\,\mathrm{d}\,u - G_u\,\mathrm{d}\,v)\,t_2 + \frac{1}{E}(\bar{L}\,\mathrm{d}\,u + \bar{M}\,\mathrm{d}\,v)\,t_3, \\ \mathrm{d}\,t_2 &= \frac{1}{2G}(E_v\,\mathrm{d}\,u - G_u\,\mathrm{d}\,v)\,t_1 - \frac{1}{2G}(G_u\,\mathrm{d}\,u + G_v\,\mathrm{d}\,v)\,t_2 + \frac{1}{G}(\bar{M}\,\mathrm{d}\,u + \bar{N}\,\mathrm{d}\,v)\,t_3, \\ \mathrm{d}\,t_3 &= -(\bar{L}\,\mathrm{d}\,u + \bar{M}\,\mathrm{d}\,v)\,t_1 - (\bar{M}\,\mathrm{d}\,u + \bar{N}\,\mathrm{d}\,v)\,t_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12).$$

7. Die Vektorkomponenten t_i sind der Reihe nach mit den Komponenten von $\bar{\mathfrak{K}}_1$, $\bar{\mathfrak{K}}_2$, $\bar{\mathfrak{M}}_1$, $\bar{\mathfrak{M}}_2$ zu identifizieren und für die Parallelverschiebung längs C_u ist noch $\mathrm{d}\,v = 0$, längs C_v ist $\mathrm{d}\,u = 0$. Daher ergibt sich z. B. für die Verschiebung von $\bar{\mathfrak{K}}_1$ längs C_v:

$$\mathrm{d}\,t_1 = -\left(-\frac{E_u}{2E} T_1 \sqrt{\frac{G}{E}} - \frac{E_v}{2E} S_1 + \frac{\bar{L}}{E} N_1 \sqrt{G}\right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,$$

$$\mathrm{d}\,t_2 = -\left(\frac{E_v}{2G} T_1 \sqrt{\frac{G}{E}} - \frac{G_u}{2G} S_1 + \frac{\bar{M}}{G} N_1 \sqrt{G}\right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,$$

$$\mathrm{d}\,t_3 = -\left(-\bar{L}\,T_1 \sqrt{\frac{G}{E}} - \bar{M}\,S_1\right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Die Glieder $\frac{\partial}{\partial u} T_1 \sqrt{\frac{G}{E}}\,\mathrm{d}\,u$ usf., die beim Grenzübergang $\mathrm{d}\,u \to 0$ bzw. $\mathrm{d}\,v \to 0$ wegfallen, sind in diesen Gleichungen schon fortgelassen.

Nach Ausführung der Parallelverschiebung gehen

die Vektoren $\bar{\mathfrak{K}}_1$, $\bar{\mathfrak{M}}_1$ in P_1 in die Vektoren $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}_1$, $\bar{\bar{\mathfrak{M}}}_1$ in P,
die Vektoren $\bar{\mathfrak{K}}_2$, $\bar{\mathfrak{M}}_2$ in P_2 in die Vektoren $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}_2$, $\bar{\bar{\mathfrak{M}}}_2$ in P über.

Ist das Parallelogramm $P P_1 R P_2$ hinreichend klein, so lassen sich die auf seine Fläche wirkenden äußeren Kräfte ersetzen durch eine Kraft X in $P(u, v)$ und ein Kräftepaar $\mathfrak{Q}$. Die Kraft X hat die Komponenten:

$$X_1 \sqrt{G}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v, \quad X_2 \sqrt{E}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v, \quad X_3 \sqrt{E G}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v \quad \text{bezüglich } \bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v, \bar{\mathfrak{v}}.$$

Damit Gleichgewicht am Schalenelemente $P P_1 R P_2$ besteht, müssen die Komponenten der Vektorsumme

$$K = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \bar{\bar{\mathfrak{K}}}_1 + \bar{\bar{\mathfrak{K}}}_2 + X$$

einzeln verschwinden.

Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die Momente ist zu beachten, daß die auf zwei gegenüberliegende Seiten unseres Elementarparallelogramms wirkenden Kräfte in ihren entgegengesetzt gleichen Anteilen Anlaß zu den zusätzlichen Momenten

$$\mathfrak{M}_1^0 = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \mathfrak{K}_1], \quad \mathfrak{M}_2^0 = [\bar{\mathfrak{x}}_v, \mathfrak{K}_2]$$

geben. Ist $\mathfrak{Q}$ das Moment der auf die Fläche $P P_1 R P_2$ wirkenden äußeren Kräfte mit den Komponenten

$$Q_1 \sqrt{G}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v, \quad Q_2 \sqrt{E}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v, \quad 0 \quad \text{bezüglich } \bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v, \bar{\mathfrak{v}},$$

so müssen daher auch die Komponenten von

$$M = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_1 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_2 + \mathfrak{M}_1^0 + \mathfrak{M}_2^0 + \mathfrak{Q}$$

einzeln Null werden.

Die Komponente von K in der Richtung $\bar{\mathfrak{x}}_u$ wird

$$K_u = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(T_1\sqrt{\frac{G}{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial v} S_2 - \left(-\frac{E_u}{2E} T_1 \sqrt{\frac{G}{E}} - \frac{E_v}{2E}\right) S_1 + \frac{\overline{L}}{E} N_1 \sqrt{G} + \frac{E_v}{2E} S_2 \right.$$
$$\left. + \frac{G_u}{2E} T_2 \sqrt{\frac{E}{G}} + \frac{\overline{M}}{E} N_2 \sqrt{E} + X_1 \sqrt{G}\right] \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Daher ist $K_u = 0$ die 1. Gleichgewichtsbedingung für das Parallelogramm $P P_1 R P_2$. Durch Grenzübergang $\mathrm{d}u \to 0$, $\mathrm{d}v \to 0$, — Glieder erster und höherer Ordnung mit $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ in der [ ]-Klammer sind bei den Rechnungen in Nr. 5, 6, 7 von vornherein weggelassen — erhält man schließlich nach leichter Umformung ingesamt die folgenden 6 Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(T_1\sqrt{G})}{\partial u} - \frac{\partial(S_2\sqrt{E})}{\partial v} + \frac{E_v}{2\sqrt{E}} S_1 - \frac{G_u}{2\sqrt{G}} T_2 - \overline{L}\sqrt{\frac{G}{E}} N_1 - \overline{M} N_2 + \sqrt{E G}\, X_1 = 0, \\
&\frac{\partial(S_1\sqrt{G})}{\partial u} + \frac{\partial(T_2\sqrt{E})}{\partial v} - \frac{E_v}{2\sqrt{E}} T_1 - \frac{G_u}{2\sqrt{G}} S_2 - \overline{M} N_1 - \overline{N}\sqrt{\frac{E}{G}} N_2 + \sqrt{E G}\, X_2 = 0, \\
&\frac{\partial(N_1\sqrt{G})}{\partial u} + \frac{\partial(N_2\sqrt{E})}{\partial v} + \overline{L}\sqrt{\frac{G}{E}} T_1 + \overline{M}(S_1 - S_2) + \overline{N}\sqrt{\frac{E}{G}} T_2 + \sqrt{E G}\, X_3 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (13),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(H_1\sqrt{G})}{\partial u} - \frac{\partial(G_2\sqrt{E})}{\partial v} + \frac{E_v}{2\sqrt{E}} G_1 - \frac{G_u}{2\sqrt{G}} H_2 + (N_2 + Q_1)\sqrt{E G} = 0, \\
&\frac{\partial(G_1\sqrt{G})}{\partial u} + \frac{\partial(H_2\sqrt{E})}{\partial v} - \frac{E_v}{2\sqrt{E}} H_1 - \frac{G_u}{2\sqrt{G}} G_2 - (N_1 - Q_2)\sqrt{E G} = 0, \\
&\overline{M}(S_1 - S_2) + \overline{L}\sqrt{\frac{G}{E}} T_1 + \overline{N}\sqrt{\frac{E}{G}} T_2 + (S_1 + S_2)\sqrt{E G} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14).$$

8. Die 6 Gln. (13), (14)[6]), zu denen noch für jedes vorliegende Einzelproblem die Randbedingungen[7]) angegeben werden müssen, sind 5 lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und eine gewöhnliche lineare Gleichung für die 10 unbekannten Funktionen T_1, T_2, S_1, S_2, N_1, N_2, G_1, G_2, H_1, H_2; das Problem ist also statisch unbestimmt. Bei vorgegebener Mittelfläche sind zwar die Größen E, G, L, N bekannt; die Größen $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ lassen sich aber nach Abschnitt III nur bei bekannten Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche angeben. (Da insbesondere an „dünnen" Schalen auch bei kleinen Deformationen größere Krümmungsänderungen auftreten können, würde die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen in den Größen L, N, also für das nichtverbogene Schalenelement, u. U. zu erheblichen Ungenauigkeiten Anlaß geben.) Wie bei einem allgemeinen elastischen Problem aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{t}^{(x)} + X = 0 \quad \text{usf.} \quad \text{mit } \mathfrak{t}^{(x)} = \sigma_x \cdot \mathfrak{i} + \tau_{xy} \cdot \mathfrak{j} + \tau_{xz} \cdot \mathfrak{k}$$
$$X = x\text{-Komponente der äußeren Kräfte}$$

allein die Spannungen nicht errechnet werden können, so sind mittels der Gln. (13), (14) allein die Spannungsresultanten und -momente nicht zu ermitteln. Hierzu muß bekanntlich das Elastizitätsgesetz der Schale herangezogen werden. Mittels der Gln. (11) sind die Spannungen einzuführen, diese aber vermöge des Hookeschen Gesetzes und der besonderen Annahmen über den Deformationszustand der Schale — Abschnitt III — schließlich auf die Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche zurückzuführen[8]). Ebenso sind die Größen $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ nach Abschnitt III durch die Verschiebungen auszudrücken, wobei die in Nr. 3 gemachten Annahmen über die Größenordnung der Verschiebungen nach dem Einsetzen in die Gln. (13), (14) noch zu Vereinfachungen Anlaß geben. So erhält man endlich ein System partieller Differentialgleichungen für die Verschiebungen $\overline{u}(u, v)$, $\overline{v}(u, v)$, $\overline{w}(u, v)$, das freilich i. a. überhaupt nicht oder doch nur näherungsweise integriert werden kann. — Bei den meisten bisher in der Literatur behandelten Problemen der Schalentheorie ergeben sich aber durch die spezielle Gestalt der Mittelfläche, geeignet veränderliche Dicke der Schale usf. so

[6]) Die Gln. (13), (14) stimmen mit den bei Love, loc. c., S. 612/13 auf anderem Wege hergeleiteten Gleichungen überein, wenn man die dort auftretenden Größen p_i', q_i', r_i' $(i = 1, 2)$ ihrer flächenmäßigen Bedeutung entsprechend durch E, G, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ ausdrückt.

[7]) Love, l. c. § 332.

[8]) In der unter [2]) zitierten Arbeit von Trefftz, S. 108, sind die Spannungsresultanten und -momente durch die Verschiebungen ausgedrückt, allerdings ausgehend von den am undeformierten Schalenelement aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen.

weitgehende Vereinfachungen im Ansatz, daß der hier in voller Allgemeinheit angegebene Weg nicht oder nur teilweise beschritten werden muß. So reduziert sich bekanntlich bei biegungsfreier Beanspruchung einer Schale die Anzahl der Spannungsresultanten — unter Wegfall der Momente — auf drei und man erhält ebensoviele Gleichgewichtsbedingungen. Derartige Aufgaben sind also statisch bestimmt (Membranspannungszustand)[9]).

9. Entsprechend dem in der linearen Elastizitätstheorie üblichen Verfahren und den Annahmen über die Größenordnung der Verschiebungen (Nr. 3) wurde bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen gefordert, daß die durch die Deformation bedingte Dehnung der Seiten des Rechtecks PP_1RP_2 vernachlässigt werden kann. Insbesondere soll der rechte Winkel zwischen den Koordinatenlinien sich nur so wenig ändern, daß durchweg mit hinreichender Annäherung die metrischen Fundamentalgrößen E, G benutzt werden dürfen. Trifft diese vereinfachende Annahme nicht mehr zu, so treten in den Gleichgewichtsbedingungen Zusatzglieder auf, die auch die metrische Fundamentalgröße $F' = (\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v)$ enthalten. Diese Zusatzglieder lassen sich wieder gemäß Nr. 6 und 7 berechnen. In den Gln. (13), (14) sind ferner überall E, G durch die entsprechenden Größen E', G' der verzerrten Mittelfläche zu ersetzen. Das in der ersten Gleichung des Systems (13) auftretende Zusatzglied hat z. B. die Form:

$$-\frac{F'}{2E'G'^2}\Big\{G'E'_v\sqrt{G'}\,T_1 - E'E'_v\sqrt{G'}\,T_2 - G'G'_u\sqrt{E'}\,S_1 + G'G'_u\sqrt{E'}\,S_2 + 3E'G'\bar{L}N_2 + 3\bar{M}\sqrt{E'G'}\,G'N_1 + \bar{N}E'^2N_2\Big\}.$$

Jetzt sind nicht nur die Spannungsresultanten und -momente und die Größen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$, sondern auch die vorläufig ebenfalls unbekannten Größen E', F', G' gemäß Nr. 10, Gl. (18) durch die bekannten Größen E, G, L, N und die Verschiebungskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ auszudrücken, um ein System von Differentialgleichungen in den letzteren zu erhalten. Außerdem ist zu beachten, daß die Spannungsresultanten und -momente jetzt auf ein Koordinatensystem $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{\sqrt{E'}}$, $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{\sqrt{G'}}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ bezogen sind. Der Winkel zwischen den Richtungen $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_u}{\sqrt{E'}}$, $\frac{\bar{\mathfrak{x}}_v}{\sqrt{G'}}$ ist aber kein rechter mehr.

III. Die Deformation der Mittelfläche.

10. Die Mittelfläche der undeformierten Schale wurde durch die Größen E, G, L, N charakterisiert, die Mittelfläche der deformierten Schale durch die Größen E', F', G', $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$. Die Verhältnisse $\frac{E'}{E}$, $\frac{G'}{G}$ kennzeichnen die infolge der Deformation eintretende Dehnung der Linienelemente der Mittelfläche, F' die Winkeländerung der Parameterlinien, die Größen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ geben gegenüber L, N die Krümmungsänderungen der Parameterlinien und damit die Krümmungsänderung der Mittelfläche an. Der Deformationszustand der Schale ist daher bestimmt, wenn die Größen E', F', G', $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ durch E, G, L, N und die Verschiebungskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ausgedrückt sind.

Zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen (13) und (14) waren entsprechend der Tatsache, daß aus ihnen allein die Spannungsresultanten und -momente i. a. nicht ermittelt werden können, besondere Annahmen über die Art der Deformation der Schale nicht erforderlich. Die Gln. (13), (14) gelten daher auch für Probleme der Schalentheorie, bei denen die nachstehenden Annahmen nicht erfüllt sind.

Für die Deformation der Schale soll das folgende physikalische Modell gelten:

Die Linienelemente, die zur undeformierten Mittelfläche normal sind, sollen gerade bleiben und zur deformierten Mittelfläche normal werden. Diese Voraussetzung ist immer erfüllt, wenn die Schalendicke $2h$ klein ist gegenüber den Abmessungen der Mittelfläche[10]). Hierzu tritt gewöhnlich die — für unsere weiteren Entwicklungen nicht wesentliche — Annahme, daß diese Linienelemente keine Dehnung erfahren sollen.

Ist $\mathfrak{x}(u,v)$ der Ortsvektor der undeformierten Mittelfläche,

$$\mathfrak{u}(u,v) = \frac{\bar{u}(u,v)}{\sqrt{E}}\,\mathfrak{x}_u + \frac{\bar{v}(u,v)}{\sqrt{G}}\,\mathfrak{x}_v + \bar{w}(u,v)\,\mathfrak{v}$$

der Verschiebungsvektor, so lassen sich die Punkte der deformierten Schale — bzw. der in Nr. 6 eingeführten M_3 — auch durch den Ortsvektor

$$X(u,v,w) = \mathfrak{x}(u,v) + w\cdot\mathfrak{v} + \mathfrak{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

[9]) Flügge: Statik u. Dynamik der Schalen, Berlin 1934, Abschn. II bis IV; Lagally: Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 377; Löbell: Z. angew. Math. Mech. Bd. 7 (1927), S. 463.

[10]) Flügge: l. c. S. 113.

beschreiben. Die Parameterlinien und die Normalen der undeformierten Mittelfläche bestimmen durch die Vektorgleichung

$$x(u,v,w) = \mathfrak{x}(u,v) + w \cdot \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ein krummliniges orthogonales räumliches u-v-w-Koordinatensystem. Die Flächen $w = \text{const}$ sind Parallelflächen zur Mittelfläche, die Flächen $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ bilden zwei Scharen abwickelbarer Regelflächen; deren Erzeugende sind die Normalen der undeformierten Mittelfläche in den Punkten der verschiedenen Krümmungslinien. Sind allgemein a_i $(i = 1, 2, 3)$ orthogonale Koordinaten eines räumlichen Bereichs, g_{ik} die zugehörigen metrischen Fundamentalgrößen und φ_i die zur Tangentenrichtung der a_i-Linie gehörigen Verschiebungskomponenten, so erhält man nach bekannten Formeln[11]) für die Verzerrungskomponenten ε_h:

$$\varepsilon_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_h} + \frac{1}{2 g_{hh}} \sum_\varrho \frac{\partial g_{hh}}{\partial a_\varrho} \varphi_\varrho ,$$

und für die Änderung γ_{hk} des ursprünglich rechten Winkels zwischen den Koordinatenflächen $a_h = \text{const}$ und $a_k = \text{const}$:

$$\gamma_{hk} = \frac{1}{\sqrt{g_{hh}\, g_{kk}}} \left\{ g_{hh} \frac{\partial \varphi_h}{\partial a_k} + g_{kk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_h} \right\} .$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$\nu_u = -\frac{L}{E}\mathfrak{x}_u , \qquad \nu_v = -\frac{N}{G}\mathfrak{x}_v$$

berechnet man leicht die g_{ik} und daraus die Verzerrungen ε_1 bzw. ε_2 in der Richtung der Linien $v = \text{const}$ bzw. $u = \text{const}$ sowie den Winkel ω, den die u- und v-Linien der verzerrten Mittelfläche einschließen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}} \bar{u}_u + \frac{\bar{v}}{\sqrt{E\,G}} E_v - \bar{w} L , \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}} \bar{v}_v + \frac{\bar{u}}{\sqrt{E\,G}} G_u - \bar{w} N , \\ \cos\omega = \sin\gamma_{12} \sim \gamma_{12} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \bar{v}_u + \frac{1}{\sqrt{G}} \bar{u}_v - \frac{\bar{u} E_v + \bar{v} G_u}{\sqrt{E\,G}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Dann ist

$$E' = E + 2\varepsilon_1 , \qquad G' = G + 2\varepsilon_2 , \qquad F' = \sqrt{E\,G}\cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

11. Zur Ermittlung der Fundamentalgrößen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ der deformierten Mittelfläche bedienen wir uns erneut des absoluten Parallelismus und gelangen damit zu einer einfacheren und durchsichtigeren Herleitung wie die etwa bei Love mit Hilfe beweglicher Koordinatensysteme gegebene[12]). Dabei stehen zur Berechnung dieser Größen noch zwei Wege zur Verfügung:

1. Zunächst können nochmals die Gleichgewichtsbedingungen nach dem in Nr. 6 und 7 gegebenen Verfahren aufgestellt werden, indem man unter Berücksichtigung der Annahmen über den Deformationszustand der Mittelfläche (Nr. 10 und 13) von der Darstellung (15) der Mittelfläche ausgeht. In die so erhaltenen 6 Gleichungen des Gleichgewichts gehen jetzt statt der Größen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ — wie in den Gln. (13) und (14) — Ausdrücke in den Größen L, N und den Verschiebungskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ein. Durch Vergleich entsprechender Glieder lassen sich $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ bestimmen.

2. Wir wollen jedoch hier einen anderen noch einfacheren Weg einschlagen, zu dessen Durchführung wir folgenden Hilfssatz benötigen:

Der Vektor

$$\mathfrak{r} = \frac{x}{\sqrt{E}}\mathfrak{x}_u + \frac{y}{\sqrt{G}}\mathfrak{x}_v + z \cdot \nu$$

wird einmal vom Punkte $P(u,v)$ der (deformierten oder undeformierten) Schalenmittelfläche im euklidischen Raume nach dem Nachbarpunkt $P_1(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$ der Schalenmittelfläche parallel verschoben. Dann wird derselbe Vektor in der in Nr. 6 konstruierten M_3 auf der Mittelfläche der Schale nach demselben Nachbarpunkt im absoluten Sinne parallel verschoben. Die Komponenten der beiden so erhaltenen Vektoren in P_1 unterscheiden sich nur um Größen zweiter und höherer Ordnung in $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$.

Man beweist diesen Satz leicht durch Rechnung, indem man die Gln. (12) auf die Komponenten des Vektors $\mathfrak{r}$ anwendet.

---

[11]) Siehe z. B. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie in: Handbuch der Physik, Berlin 1928, Bd. VI, S. 78.
[12]) Love: l. c. § 326.

12. Nunmehr wird der Vektor $\boldsymbol{\nu}$ im Punkte $P(u,v)$ der undeformierten Mittelfläche auf den zugeordneten Punkt $P'(u,v)$ der deformierten Mittelfläche übertragen, indem seine Komponenten auf das System X_u, X_v, X_w (s. Gl. (15) und (19)) transformiert werden. Hierauf wird der transformierte Vektor vom Punkte $P'(u,v)$ nach dem Nachbarpunkte $P_1'(u+\mathrm{d}u, v)$ der deformierten Mittelfläche parallel verschoben und man erhält den Vektor $\boldsymbol{\nu}_1'$ in P_1'. In die Differentialgleichungen (12) der Parallelverschiebung gehen E, G, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ ein. Dann wird derselbe Vektor $\boldsymbol{\nu}$ auf der undeformierten Mittelfläche vom Punkte $P(u,v)$ zum Nachbarpunkte $P_1(u+\mathrm{d}u, v)$ parallel verschoben; in die Differentialgleichungen der Parallelverschiebung gehen nur die bekannten Größen E, G, L, N ein. Schließlich wird der Vektor vom Punkte P_1 in den P_1 zugeordneten Punkt $P_1'(u+\mathrm{d}u, v)$ der deformierten Mittelfläche übertragen, indem seine Komponenten vom System $\mathfrak{x}_u(u+\mathrm{d}u, v)$, $\mathfrak{x}_v(u+\mathrm{d}u, v)$, $\boldsymbol{\nu}(u+\mathrm{d}u, v)$ auf das System $X_u(u+\mathrm{d}u, v)$, $X_v(u+\mathrm{d}u, v)$, $X_w(u+\mathrm{d}u, v)$ (Gl. 15) transformiert werden. Man erhält so den Vektor $\boldsymbol{\nu}_1$ in P_1'. Insgesamt wird also der Vektor $\boldsymbol{\nu}$, wie in Bild 5 symbolisch angegeben, auf zwei verschiedenen „Wegen" I, II vom Punkte $P(u,v)$ der undeformierten Mittelfläche zum Punkte $P_1'(u+\mathrm{d}u, v)$ der deformierten Mittelfläche gebracht. Nach dem Hilfssatz in Nr. 11, 2 unterscheiden sich die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{\nu}_1$ und $\boldsymbol{\nu}_1'$ nur um Glieder von zweiter und höherer Ordnung in $\mathrm{d}u$, da die Übertragungen $P \to P'$, $P_1 \to P_1'$ (Bild 5) nur den Charakter euklidischer Koordinatentransformationen haben.

Bild 5.

Ist daher $\mathrm{d}t_1'$ der Zuwachs der ersten Komponente von $\boldsymbol{\nu}$ (auf das System X_u, X_v, X_w bezogen) nach Durchlaufung des „Weges" I (Bild 5), $\mathrm{d}t_1$ der entsprechende Zuwachs nach Durchlaufung des „Weges" II, so folgt durch Grenzübergang $\mathrm{d}u \to 0$ mit $\lim\limits_{\mathrm{d}u\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{\delta t_1}{\delta u}$, $\lim\limits_{\mathrm{d}u\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}t_1'}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{\delta t_1'}{\delta u}$:

$$\frac{\delta t_1}{\delta u} = \frac{\delta t_1'}{\delta u}. \quad \left(\text{Hiervon ist die partielle Ableitung } \frac{\partial}{\partial u} t_1(u,v) = \frac{\partial t_1}{\partial u} \text{ zu unterscheiden!}\right)$$

Dabei geht in $\frac{\delta t_1'}{\delta u}$ unter den Annahmen der Gln. (22) die unbekannte Größe $\bar{L}$ allein ein, im übrigen kommen wie auch in $\frac{\delta t_1}{\delta u}$ nur die Fundamentalgrößen der undeformierten Mittelfläche und die Verschiebungen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ vor, so daß $\bar{L}$ errechnet werden kann. Insgesamt lassen sich so die Größen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ bestimmen, wenn man dieselben Operationen auch für einen Punkt $P_2(u, v+\mathrm{d}v)$ und $P_2'(u, v+\mathrm{d}v)$ der undeformierten bzw. deformierten Mittelfläche ausführt.

13. Für die Übertragung des Vektors $\boldsymbol{\nu}$ vom $\mathfrak{x}_u$-$\mathfrak{x}_v$-$\boldsymbol{\nu}$-System im Punkte $P(u,v)$ auf das X_u-X_v-X_w-System im Punkte $P'(u,v)$ gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
X_u &= \left(1 + \frac{\bar{u}_u}{\sqrt{E}} + \frac{1}{2}\bar{v}\frac{E_v}{E\sqrt{G}} - \bar{w}\frac{L}{E}\right)\mathfrak{x}_u + \left(\frac{\bar{v}_u}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2}\bar{u}\frac{E_v}{G\sqrt{E}}\right)\mathfrak{x}_v + \left(\bar{w}_u + \frac{\bar{u}L}{\sqrt{E}}\right)\boldsymbol{\nu},\\
X_v &= \left(\frac{\bar{u}_v}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\bar{v}\frac{G_u}{E\sqrt{G}}\right)\mathfrak{x}_u + \left(1 + \frac{\bar{v}_v}{\sqrt{G}} + \frac{1}{2}\bar{u}\frac{G_u}{G\sqrt{E}} - \bar{w}\frac{N}{G}\right)\mathfrak{x}_v + \left(\bar{w}_v + \frac{\bar{v}N}{\sqrt{G}}\right)\boldsymbol{\nu},\\
X_w &= \left(\frac{\bar{u}_w}{\sqrt{E}} - \frac{\bar{u}L}{E\sqrt{E}}\right)\mathfrak{x}_u + \left(\frac{\bar{v}_v}{\sqrt{G}} - \frac{\bar{v}N}{G\sqrt{G}}\right)\mathfrak{x}_v + (1 + \bar{w}_w)\,\boldsymbol{\nu}
\end{aligned}\right\} \quad (19).$$

Die Verschiebungskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ müssen dem in Nr. 10 für die Deformation der Schale entworfenen physikalischen Modell entsprechen:

1. Die Linienelemente senkrecht zur Mittelfläche sollen gerade bleiben und auch nach der Deformation senkrecht zur Mittelfläche sein. Das führt auf die Bedingungen:

$$(X_u X_w) = 0, \quad (X_v X_w) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Verlangt man ferner, daß in der Richtung senkrecht zur Mittelfläche keine Dehnung oder Verkürzung erfolgt, so gilt weiter:

$$(X_w X_w) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Die folgenden Rechnungen sollen ferner zur Vereinfachung zunächst für den Fall einer dehnungslosen Deformation der Mittelfläche durchgeführt werden, so daß auch:

$$(X_u X_u) = E, \quad (X_v X_v) = G, \quad (X_u X_v) = F \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Doch lassen sich die ganzen Entwicklungen auch ohne die Bedingungen (22) durchführen (Nr. 14).

Aus den Gln. (20) bis (22) folgen 6 Relationen zwischen den Verschiebungskomponenten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und ihren partiellen Ableitungen, so daß sich die Gln. (19) wie folgt vereinfachen:

$$X_u = \mathfrak{x}_u + \left(\frac{\bar{v}_u}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{G\sqrt{E}}\right)\mathfrak{x}_v + \left(\bar{w}_u + \frac{\bar{u}\,L}{\sqrt{E}}\right)\nu,$$

$$X_v = \left(\frac{\bar{u}_v}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{E\sqrt{G}}\right)\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v + \left(\bar{w}_v + \frac{\bar{v}\,N}{\sqrt{G}}\right)\nu,$$

$$X_w = \left(\frac{\bar{u}_w}{\sqrt{E}} - \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right)\mathfrak{x}_u + \left(\frac{\bar{v}_w}{\sqrt{G}} - \frac{\bar{v}\,N}{G\sqrt{G}}\right)\mathfrak{x}_v + \nu\,.$$

Überträgt man jetzt den Vektor $\nu(P)$ auf die verbogene Mittelfläche, so ergibt sich

$$\nu(P') = \left(\frac{\bar{w}_u}{E} + \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right)X_u + \left(\frac{\bar{w}_v}{G} + \frac{\bar{v}\,N}{G\sqrt{G}}\right)X_v + X_w = t_1\,X_u + t_2\,X_v + X_w \quad . \quad . \quad (23).$$

Aus den Differentialgleichungen (12) der Parallelverschiebung folgt für die Verschiebung nach P_1':

$$\mathrm{d}\,t_1' = \left(-\frac{E_u}{2E}\,t_1 - \frac{E_v}{2E}\,t_2 + \frac{\bar{L}}{E}\,t_3\right)\mathrm{d}\,u\,.$$

Daher wird mit $\lim\limits_{\mathrm{d}u \to 0} \frac{\mathrm{d}\,t_1'}{\mathrm{d}\,u} = \frac{\delta\,t_1'}{\delta\,u}$:

$$\bar{L} = \left(\frac{\delta\,t_1'}{\delta\,u}\,E + \frac{E_u}{2}\,t_1 + \frac{E_v}{2}\,t_2\right)\frac{1}{t_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

Andererseits ergibt die Parallelverschiebung von $\nu(P)$ auf der undeformierten Mittelfläche (Weg II in Bild 5):

$$\nu_1(P_1) = \frac{L}{E}\,\mathrm{d}\,u \cdot \mathfrak{x}_u(u + \mathrm{d}\,u, v) + \nu(u + \mathrm{d}\,u, v)\,,$$

in das System $X_u(u + \mathrm{d}\,u, v)$, $X_v(u + \mathrm{d}\,u, v)$, $X_w(u + \mathrm{d}\,u, v)$ übertragen:

$$\nu_1(P_1') = \left\{\frac{L}{E}\,\mathrm{d}\,u + \frac{\bar{w}_u}{E} + \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}} + \frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{\bar{w}_u}{E} + \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right)\mathrm{d}\,u\right\}X_u(u + \mathrm{d}\,u, v) + \cdots.$$

Hieraus und aus Gl. (23):

$$\mathrm{d}\,t_1 = \frac{L}{E}\,\mathrm{d}\,u + \frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{\bar{w}_u}{E} + \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right)\mathrm{d}\,u\,.$$

$\mathrm{d}\,t_1$ und $\mathrm{d}\,t_1'$ unterscheiden sich nach dem Hilfssatz Nr. 11,2 nur um Größen von der Ordnung $\mathrm{d}\,u^2$, daher liefert jetzt der Grenzübergang $\mathrm{d}\,u \to 0$ (Nr. 12):

$$\frac{\delta\,t_1'}{\delta\,u} = \frac{\delta\,t_1}{\delta\,u} = \frac{L}{E} + \frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{\bar{w}_u}{E} + \frac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25).$$

Setzt man (25) in (24) und daselbst für t_1, t_2 ihre Werte aus Gl. (23) ein, so wird endlich:

$$\bar{L} = L + \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial\,u}\left(\frac{\bar{w}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\bar{u}\,L}{E}\right) + \frac{E_v}{2\sqrt{G}}\left(\frac{\bar{w}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\bar{v}\,N}{G}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Dann bestimmt man in gleicher Weise $\mathrm{d}\,t_2$ und $\mathrm{d}\,t_2'$ und führt endlich dieselben Rechnungen auch für die Punkte $P_2(u, v + \mathrm{d}\,v)$ der undeformierten und $P_2'(u, v + \mathrm{d}\,v)$ der deformierten Mittelfläche[13]) aus. So erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \bar{M} = \frac{1}{2}\Bigg[&\frac{L}{\sqrt{E}}\left(\bar{u}_v - \frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\right) + \frac{N}{\sqrt{G}}\left(\bar{v}_u - \frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\right) \\ &-\left(\frac{E_v}{2\sqrt{E}} - \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial\,v}\right)\left(\frac{\bar{w}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\bar{u}\,L}{E}\right) - \left(\frac{G_u}{2\sqrt{G}} - \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial\,u}\right)\left(\frac{\bar{w}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\bar{v}\,N}{G}\right)\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (27),$$

$$\bar{N} = N + \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial\,v}\left(\frac{\bar{w}_v}{\sqrt{G}} + \frac{\bar{v}\,N}{G}\right) + \frac{G_u}{2\sqrt{E}}\left(\frac{\bar{w}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\bar{u}\,L}{E}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

---

[13]) Zur Rechnung werden jeweils die Komponentenänderungen $\mathrm{d}\,t_1$ und $\mathrm{d}\,t_2$ benutzt, da in den Gleichungen für $\mathrm{d}\,t_3$ immer 2 der unbekannten Größen $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ gleichzeitig auftreten.

Die exakte mathematische Behandlung eines allgemeinen Problems der Schalentheorie stellt sich nunmehr wie folgt dar:

In den Gln. (13), (14) werden an Stelle der Spannungsresultanten und -momente die Verschiebungen eingeführt und die Fundamentalgrößen der deformierten Mittelfläche durch die Fundamentalgrößen der undeformierten Mittelfläche und die Verschiebungen gemäß den Gln. (19) und (26) bis (28) ausgedrückt. Aus dem so erhaltenen System partieller Differentialgleichungen sind die Verschiebungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu bestimmen. Dann berechnen sich die Dehnungen der Mittelfläche und alle die deformierte Mittelfläche geometrisch kennzeichnenden Größen aus den Gln. (19) und (26) bis (28).

14. Werden die Rechnungen der Nr. 13 ohne die vereinfachende Annahme einer dehnungslosen Deformation der Mittelfläche durchgeführt, so fallen die Gln. (22) weg. Die Gleichungen der Parallelverschiebung auf der deformierten Mittelfläche enthalten jetzt die metrischen Fundamentalgrößen E', F', G' (Nr. 10, Gl. 18). An Stelle einer unmittelbaren Bestimmung der zweiten Fundamentalgrößen $\bar{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ ergeben sich jetzt auf dem in den Nr. 12, 13 eingeschlagenen Weg folgende 4 Relationen zwischen diesen Größen:

$$\left.\begin{aligned}
2\,G'\,\bar{L}+3\,F'\,\overline{M} &= (G'\,E'_u-F'\,E'_v)\,t_1+(G'\,E'_v+F'\,G'_u)\,t_2 \\
&\quad +2\,G'\,E'\frac{L}{E}+2\,E'\,G'\frac{\partial t_1}{\partial u}, \\
3\,F'\,G'\,\bar{L}+2\,E'\,G'\,\overline{M}+E'\,F'\,\overline{N} &= (F'\,G'\,E'_u-E'\,G'\,E'_v)\,t_1+(F'\,G'\,E'_v+E'\,G'\,G'_u)\,t_2 \\
&\quad +2\,E'\,G'^2\,\frac{L}{E}\left(\bar{u}_v\frac{\sqrt{E}}{G}-\frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{G\sqrt{G}}\right)+2\,E'\,G'^2\frac{\partial t_2}{\partial u}, \\
F'\,G'\,\bar{L}+2\,E'\,G'\,\overline{M}+3\,E'\,F'\,\overline{N} &= (E'\,G'\,E'_v+E'\,F'\,G'_u)\,t_1+(E'\,F'\,G'_v+2\,E'\,G'\,F'_v-E'\,G'\,G'_u)\,t_2 \\
&\quad +2\,E'^2\,G'\,\frac{N}{G}\left(\bar{v}_u\frac{\sqrt{G}}{E}-\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{E\sqrt{E}}\right)+2\,E'^2\,G'\frac{\partial t_1}{\partial v}, \\
3\,F'\,\overline{M}+2\,E'\,\overline{N} &= (F'\,E'_v+E'\,G'_u)\,t_1+(E'\,G'_v-F'\,G'_u)\,t_2 \\
&\quad +2\,E'\,G'\frac{N}{G}+2\,E'\,G'\frac{\partial t_2}{\partial v}
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

mit $t_1=\dfrac{\bar{w}_u}{E}+\dfrac{\bar{u}\,L}{E\sqrt{E}},\quad t_2=\dfrac{\bar{w}_v}{G}+\dfrac{\bar{v}\,N}{G\sqrt{G}}.$

Aus irgend drei von diesen Gleichungen lassen sich $\bar{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ bestimmen. Für hinreichend kleines F', so daß die Produkte $F'\,t_i$ Größen zweiter Ordnung darstellen, sind die angenäherten Lösungen des Systems (29) gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{L} &= \frac{E'}{E}\,L+\frac{E'_u}{2}\,t_1+\frac{E'_v}{2}\,t_2+E'\frac{\partial}{\partial u}\,t_1, \\
\overline{M} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{G'}{E}\,L\left(\bar{u}_v\frac{\sqrt{E}}{G}-\frac{1}{2}\,\bar{v}\,\frac{G_u}{G\sqrt{G}}\right)+\frac{E'}{G}\,N\left(\bar{v}_u\frac{\sqrt{G}}{E}-\frac{1}{2}\,\bar{u}\,\frac{E_v}{E\sqrt{E}}\right)+E'\frac{\partial}{\partial v}\,t_1+G'\frac{\partial}{\partial u}\,t_2\right\}, \\
\overline{N} &= \frac{G'}{G}\,N+\frac{G'_u}{2}\,t_1+\frac{G'_v}{2}\,t_2+G'\frac{\partial}{\partial v}\,t_2
\end{aligned}\right\}\quad(30).$$

Das im Abschnitt III angegebene Verfahren zur Berechnung der Größen $\bar{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ läßt sich sogar noch anwenden, wenn auch die Bedingungsgleichungen (20), (21) wegfallen oder durch solche andere ersetzt werden, die sich aus einer entsprechenden Abänderung der Annahmen über den Deformationszustand der Schale (Nr. 10 und 13) ergeben. Dieser Weg ist daher von größerer Allgemeinheit als die Berechnung der Verbiegungsgrößen mittels des Castiglianoschen Prinzips nach Trefftz[14]) und führt mit geringerem Rechenaufwand zum Ziel. Andererseits liefert er aber den Zusammenhang zwischen den Spannungsresultanten bzw. -momenten und den Verschiebungen, die Trefftz gleichzeitig erhält, nicht mit, doch können diese natürlich auch in anderer Weise gewonnen werden. 340

[14]) Trefftz: Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 108.

Spannungsverteilung in stabförmigen Membran-Kegelschalen.

(Bericht der Festigkeitsabteilung der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H.)

Von *A. Pflüger* in Bremen.

Bei einem biegungsfesten, geraden Stab, der einen dünnwandigen Hohlquerschnitt mit längs der Stabachse veränderlichen Abmessungen besitzt, ist es für die Ermittlung der Spannungsverteilung nicht mehr ausreichend genau, wenn man den Stab an jeder gerade betrachteten Stelle durch einen Zylinder annähert und die hierfür gültigen Formeln der technischen Balkenbiegungslehre benutzt. In der vorliegenden Arbeit wird die Spannungsrechnung dadurch verfeinert, daß der Stab durch eine Kegelschale ersetzt wird. Die Ergebnisse der Theorie werden mit Messungen an einem Versuchsstück verglichen.

1. Einleitung.

Es ist allgemein üblich, bei der Spannungsberechnung biegungsfester, gerader Stäbe die Näherungstheorie der technischen Balkenbiegungslehre auch dann anzuwenden, wenn der Querschnitt des Stabes über die Stablänge veränderlich ist. Man ersetzt dabei den wirklichen Stab an jeder gerade betrachteten Stelle durch einen zylindrischen Stab gleichen Querschnitts. Dieses Verfahren ist jedoch dann nicht mehr zulässig, wenn der Stab einen dünnwandigen Hohlquerschnitt besitzt. Hierbei zeigt sich nämlich, daß die auftretenden Schubspannungen, die bei Hohlquerschnitten im allgemeinen sehr wesentlich sind, schon recht erheblich beeinflußt werden, wenn die Form des Stabes auch nur wenig von der eines Hohlzylinders abweicht. Diese Tatsache läßt sich für den bisher in der Literatur behandelten Sonderfall, daß der Stab aus einem Kreis-Hohlkegel besteht, leicht nachweisen[1]). Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen soll die Spannungsverteilung sein, die in einem stabförmigen Hohlkegel allgemeiner Art bei Beanspruchung durch Längskraft, Querkraft, Biegung und Torsion hervorgerufen wird. Um mit der gestellten Aufgabe eine anschauliche Vorstellung zu verbinden, denke man bei den folgenden Rechnungen etwa an den in Bild 1 dargestellten einseitig eingespannten Balken, der an seinem freien Ende durch Kräfte und Momente belastet ist. Wenn der Hohlkegel auch noch nicht die allgemeinste Form ist, die ein Stab mit Hohlquerschnitt haben kann, so wird man doch stets eine bessere Lösung erhalten, wenn man den zu berechnenden Stab durch einen Kegel annähert, als wenn man ihn nur durch einen Zylinder ersetzt.

2. Allgemeines, Bezeichnungen.

Bild 2 zeigt einen Teil der Mittelfläche der zu untersuchenden Kegelschale. Dabei wird als Stabachse eine Gerade bezeichnet, von der vorläufig nur vorausgesetzt sei, daß sie durch die Kegelspitze hindurchgeht und innerhalb der Schale verläuft; ihre genaue Lage wird erst später festgelegt. Von einem stabförmigen Kegel kann nur dann gesprochen werden, wenn seine Abmessungen in Richtung der Stabachse wesentlich größer sind als in den beiden dazu senkrechten Richtungen. Der Winkel zwischen der Kegelerzeugenden und der Stabachse muß also stets ein kleiner Winkel sein, der die Größenordnung von 10° nicht allzusehr überschreiten darf. Die Schnittkurve, die die Ebene eines Querschnitts senkrecht zur Stabachse mit der Schalenmittelfläche bildet, sei als Querschnittskurve bezeichnet. Sie wird im allgemeinen keine Krümmungslinie der Mittelfläche sein, jedoch wegen der stabförmigen Gestalt des Kegels nicht sehr davon abweichen. Der Einfachheit halber ist in den Bildern 1 und 2 ein Kegel mit „einzelligem" Querschnitt dargestellt worden. Die folgenden Betrachtungen gelten jedoch auch für mehrzellige Querschnitte.

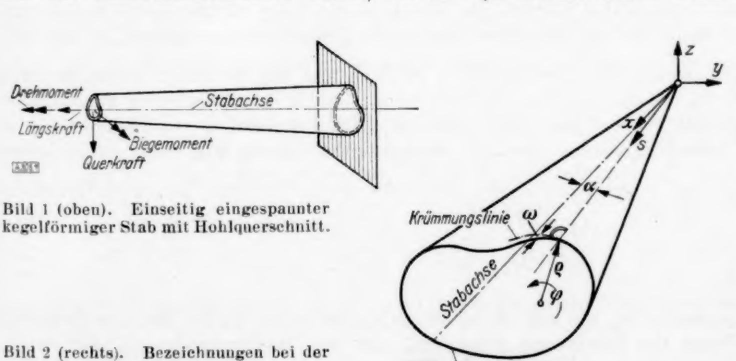


Bild 1 (oben). Einseitig eingespannter kegelförmiger Stab mit Hohlquerschnitt.

Bild 2 (rechts). Bezeichnungen bei der Kegelschale.

[1]) H. Neuber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 203. — H. Ebner: Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 96.

Es mögen bedeuten

x, y, z Koordinaten eines rechtwinkligen Systems, dessen Nullpunkt in der Kegelspitze liegt, und dessen x-Achse mit der Stabachse zusammenfällt,
s Abstand eines Punktes der Schalenmittelfläche von der Kegelspitze,
α Winkel zwischen der Stabachse und den Erzeugenden der Mittelfläche,
ϱ Krümmungsradius der Querschnittskurven,
φ in der Querschnittsebene gemessener Winkel, den ein Krümmungsradius ϱ mit einer (beliebig wählbaren) Nullrichtung bildet,
ω Winkel zwischen den Querschnittskurven und den Krümmungslinien der Schalenmittelfläche, die zu den Erzeugenden des Kegels orthogonal sind.

Die als positiv gewählte Richtung von ϱ, φ und ω geht aus Bild 2 hervor. Die Gestalt der Mittelfläche ist festgelegt, wenn für einen bestimmten Querschnitt $x =$ konst. der Verlauf der Querschnittskurve gegeben ist. Im folgenden seien alle Abmessungen der Schale auf einen Schnitt bezogen, der sich im Abstand $x = a$ von der Kegelspitze befindet. Es sei

y_a, z_a Koordinaten der Querschnittskurve des Schnittes $x = a$,
ϱ_a Krümmungsradius der Querschnittskurve des Schnittes $x = a$.

3. Gleichgewicht am Stabelement.

In der Theorie der gewöhnlichen Balkenbiegung werden nur solche Spannungszustände betrachtet, die sich in hinreichender Entfernung von einer Lastangriffsstelle einstellen. Die durch die Art der Krafteinleitung bedingten Spannungsstörungen sind nach dem Saint-Venantschen Prinzip örtlich beschränkt und außerdem im allgemeinen praktisch von untergeordneter Bedeutung. Bei dem hier zu berechnenden Kegelstab soll die Spannungsverteilung unter sinngemäßer Erweiterung der bekannten Ansätze der Balkenbiegung ermittelt werden. Es sei daher zur Untersuchung des Gleichgewichts an einem Stabelement, das durch zwei Schnitte $x =$ konst. aus dem Kegel herausgeschnitten wird, ebenfalls eine Stelle des Stabes betrachtet, an der keine äußere Belastung wirkt. An dem in Bild 3 dargestellten Stabelement greifen demnach nur Schnittkräfte bzw. -momente an. Es sei

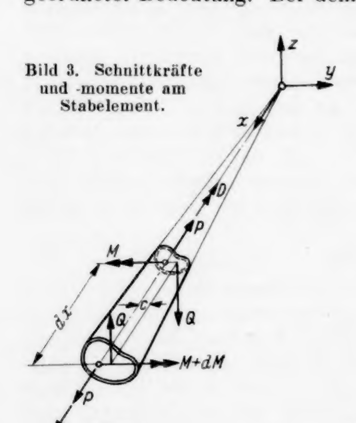


Bild 3. Schnittkräfte und -momente am Stabelement.

P Längskraft,
Q Querkraft parallel zur z-Achse,
c Abstand der Querkraft Q von der x-z-Ebene (über die Größe von c wird später noch besonders verfügt),
M Biegemoment in der x-z-Ebene (Momentenvektor parallel zur y-Achse),
D Drehmoment.

Die positive Richtung dieser Größen geht aus Bild 3 hervor. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen soll eine Beanspruchung durch Querkräfte und Biegemomente in der x-y-Ebene nicht berücksichtigt werden. Sie kann unbeachtet bleiben, da ihre Untersuchung nichts Neues bietet und eine spätere Verallgemeinerung der gewonnenen Ergebnisse keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

Die Bedingungen für das Kräftegleichgewicht in Richtung der x- und z-Achse und für das Momentengleichgewicht um die x-Achse liefern das in Bild 3 bereits vorweg genommene Ergebnis, daß die Längskraft P, die Querkraft Q und das Drehmoment D unabhängig von x einen konstanten Wert haben müssen. Aus der Momentenbedingung um eine zur y-Achse parallele Gerade folgt

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0,$$

$$M = M_0 + Q x,$$

wobei die Integrationskonstante M_0 als ein in der Kegelspitze angreifendes Moment gedeutet werden kann. M_0 sei durch die Forderung festgelegt, daß das Biegemoment an der Stelle $x = a$ den Wert $M = M_a$ annehmen soll. Damit wird

$$M = M_a + Q(x - a) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

4. Gleichgewicht am Schalenelement.

Während Gl. (1) etwas über das Gleichgewicht „im Großen" aussagt, sollen jetzt die Verhältnisse am einzelnen Schalenelement betrachtet werden. Dabei sei die wesentliche vereinfachende Annahme gemacht, daß die Schalendicke hinreichend gering ist, um den Kegel als Membranschale, d. h. als Schale ohne Biegungs- und Drillungssteifigkeit der Mittelfläche, berechnen zu können. Wenn es sich auch im folgenden um das Aufsuchen eines Spannungszustandes handeln wird, der wie die Ansätze der gewöhnlichen Balkenbiegung im allgemeinen nur eine Näherung darstellt, so soll doch von der gesuchten Spannungsverteilung verlangt werden, daß sie die Gleichgewichtsbedingungen am Element der Kegelschale exakt erfüllt.

Zur Aufstellung dieser Bedingungen sei aus der Schalenmittelfläche ein Element durch zwei benachbarte Schnitte $x =$ konst. und $\varphi =$ konst. herausgeschnitten. Die Begrenzungslinien des Elementes sind also zwei Querschnittskurven und zwei Erzeugende; die Seitenlängen sind $\varrho\,d\varphi$ und ds. Da die Querschnittskurven und die Erzeugenden auf der Schalenmittelfläche ein Netz schiefwinkliger Koordinatenlinien darstellen, werden an dem betrachteten Schalenelement auch am zweckmäßigsten „schiefe Schnittkräfte" definiert[2]).

In Bild 4 ist das Schalenelement mit den daran angreifenden Kräften dargestellt. Die in Richtung der Erzeugenden auftretenden Längskräfte sind mit N, die Schubkräfte (oder Schubflüsse) mit T bezeichnet. Eine äußere Belastung ist aus den schon erwähnten Gründen auch hier nicht vorhanden. Querkräfte, Biegemomente und Drillungsmomente treten nicht auf, da es sich voraussetzungsgemäß um einen Membranspannungszustand handelt. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß in Bild 4 eine in Richtung der Querschnittskurve wirkende Längskraft nicht eingetragen ist. Ihr Vorhandensein würde an sich mit der Forderung eines Membranspannungszustandes verträglich sein. Aus der Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Normalen zur Schalenmittelfläche folgt jedoch sofort, daß die in Frage stehende Schnittkraft im vorliegenden Fall verschwinden muß. Sie würde nämlich allein einen Beitrag zu dieser Gleichgewichtsbedingung liefern, da die Kräfte N und T in der Tangentialebene liegen und eine äußere Belastung des Schalenelementes nicht vorhanden ist. Von den zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen ist damit eine bereits verbraucht. Die Momenten-Gleichgewichtsbedingung um die Schalennormale sagt ebenfalls nichts Neues mehr aus; sie liefert die in Bild 4 schon als bekannt vorausgesetzte Gleichheit der einander zugeordneten Schubkräfte. Zur Aufstellung von Beziehungen zwischen den Schnittkräften N und T bleiben dann noch zwei Bedingungen für das Kräftegleichgewicht in der Tangentialebene übrig. Zweckmäßig wird hier das Gleichgewicht in Richtung der Tangente an die Krümmungslinie und in Richtung der Erzeugenden betrachtet. Als erste Bedingung erhält man dann

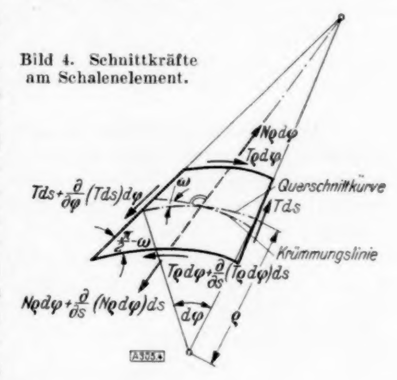


Bild 4. Schnittkräfte am Schalenelement.

$$\frac{\partial}{\partial s}(T\varrho\,d\varphi)\,ds\cos\omega + T\,ds\,\frac{\varrho}{s}\cos\omega\,d\varphi = 0;$$

dabei ist $\frac{\varrho}{s}\cos\omega\,d\varphi$ der Winkel, den die beiden das Schalenelement begrenzenden Erzeugenden miteinander bilden. Als Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Erzeugenden ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial s}(N\varrho\,d\varphi)\,ds + \frac{\partial}{\partial\varphi}(T\,ds)\,d\varphi + \frac{\partial}{\partial s}(T\varrho\,d\varphi)\,ds\sin\omega = 0.$$

Beachtet man, daß $\cos\alpha = \frac{x}{s}$ ist, und setzt zur Abkürzung

$$\frac{\partial(\ldots)}{\partial x} = (\ldots)', \qquad \frac{\partial(\ldots)}{\partial\varphi} = (\ldots)^{\cdot},$$

so ergibt sich aus der ersten der beiden Gleichgewichtsbedingungen nach Division durch $dx\,d\varphi$

$$(T\varrho)' + T\frac{\varrho}{x} = 0$$

[2]) Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, S. 11.

und aus der zweiten

$$(N\varrho)' + \left(\frac{T}{\cos a}\right)^{\cdot} + (T\varrho)' \sin\omega = 0$$

oder

$$(N\varrho)' + \left(\frac{T}{\cos a}\right)^{\cdot} - T\frac{\varrho}{x}\sin\omega = 0 .$$

Es ist nun

$$\sin\omega = \frac{\partial\left(\frac{x}{\cos a}\right)}{\varrho\,\partial\varphi} = \frac{x}{\varrho}\left(\frac{1}{\cos a}\right)^{\cdot} .$$

Damit wird

$$(N\varrho)' + \frac{T^{\cdot}}{\cos a} = 0 .$$

Bezieht man wieder alle Ausdrücke auf den Querschnitt $x = a$, indem man $\varrho = \frac{\varrho_a}{a}x$ setzt, so nehmen die beiden Gleichgewichtsbedingungen, denen der gesuchte Spannungszustand genügen muß, folgende Form an

$$\left.\begin{aligned} (Tx)^{\cdot} + T &= 0, \\ (Nx)'\frac{\varrho_a}{a}\cos a + T^{\cdot} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2a, b).$$

Sind die Schnittkräfte N und T bekannt, so ist es z. B. für die Berechnung der in der Schale auftretenden Spannungen erforderlich, die schiefen Schnittkräfte auf die Schnittkräfte eines rechtwinkligen Netzes von Koordinatenlinien der Schalenmittelfläche zu transformieren. Hierzu wird zweckmäßig das System der Krümmungslinien gewählt. Die hierbei in Richtung der Erzeugenden auftretende Längskraft sei N^* und die zugehörigen Schubkräfte T^*. Die Längskraft in Richtung der zur Erzeugenden orthogonalen Krümmungslinie muß wieder zu Null werden, da sonst die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Schalennormalen nicht erfüllt werden kann. Zur Aufstellung der Beziehungen zwischen N, T und N^*, T^* wird nach Bild 5 ein dreieckiges Element der Schalenmittelfläche betrachtet, dessen Seiten der Erzeugenden, der Tangente an die Querschnittskurve und der Tangente an die zur Erzeugenden senkrechte Krümmungslinie parallel sind. Aus der Gleichgewichtsbedingung in s-Richtung und senkrecht dazu folgt dann sofort

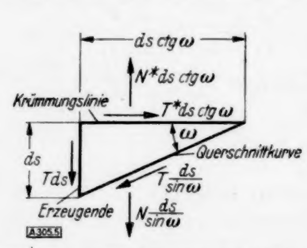


Bild 5. Dreieckiges Schalenelement.

$$(N + T\sin\omega)\frac{\mathrm{d}s}{\sin\omega} + T\,\mathrm{d}s - N^*\,\mathrm{d}s\,\mathrm{ctg}\,\omega = 0,$$

$$T\cos\omega\,\frac{\mathrm{d}s}{\sin\omega} - T^*\,\mathrm{d}s\,\mathrm{ctg}\,\omega = 0 .$$

Oder aufgelöst nach N^* und T^*

$$\left.\begin{aligned} N^* &= \frac{N}{\cos\omega} + 2T\,\mathrm{tg}\,\omega, \\ T^* &= T \end{aligned}\right\} \qquad (3a, b).$$

5. Ansatz für die Spannungsverteilung.

Durch die bisher aufgestellten Formeln ist die Spannungsverteilung durchaus noch nicht festgelegt. Vielmehr lassen sich beliebig viele Spannungszustände angeben, die sämtlich die bisher allein betrachteten Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Versucht man zu einer Festlegung des in Frage kommenden Spannungsansatzes dadurch zu gelangen, daß man auch die Verformungsbedingungen der Schale betrachtet, so ergibt sich zunächst folgende Schwierigkeit, die nicht nur für die Kegelschale, sondern auch schon für eine zylindrische Schale mit dünner Wandstärke besteht. Es war vorausgesetzt worden, daß der zu untersuchende Stab als Membranschale berechnet werden kann. Bei Membranschalen führt aber im allgemeinen jeder die Gleichgewichtsbedingungen befriedigende Spannungszustand auch zu einem möglichen Verformungszustand. Die Festlegung der sich bei einer bestimmten Belastung einstellenden inneren Kräfte der Schale geschieht erst durch die besonderen Randbedingungen, die für den Angriff der äußeren Kräfte vorgeschrieben sind. Der in dem Stab auftretende Spannungszustand würde damit von der Art der Einleitung der Kräfte P und Q

und der Momente M und D auch an den Stellen abhängig werden, die vom Ort der Einleitung weit entfernt sind[3]). Es würde dann die ganze beabsichtigte Übertragung der Gedankengänge der gewöhnlichen Biegelehre auf Stäbe mit dünnwandigem Hohlquerschnitt überhaupt nicht mehr möglich sein. Die Verhältnisse liegen jedoch in Wirklichkeit dadurch anders, daß eine reine Membranschale, wie sie für die bisherige Untersuchung vorausgesetzt war, praktisch nie vorliegt, da sie wegen ihrer Fähigkeit, große spannungslose Verformungen ausführen zu können, gar kein brauchbares Bauelement sein würde. Vielmehr ist es stets erforderlich, der Schale durch Rippen oder Spante und im allgemeinen auch durch Längsversteifungen in Richtung der Erzeugenden eine gewisse Steifigkeit zu geben, falls hierzu nicht schon die bisher vernachlässigte, in Wirklichkeit aber stets vorhandene Biegesteifigkeit der Schalenmittelfläche ausreichend ist. Infolgedessen kann auch der Stab mit dünnwandigem Hohlquerschnitt nur noch ganz bestimmte Verformungen ausführen, die denen eines Stabes mit Vollquerschnitt genau entsprechen. Die an Krafteinleitungsstellen auftretenden Spannungsstörungen werden durch die Versteifungen bzw. durch den Biegewiderstand der Schalenmittelfläche zum Abklingen gebracht. Zur Aufstellung eines Spannungsansatzes können dann die bekannten Annahmen der Balkenbiegung, z. B. die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte, auch bei stabförmigen Membranschalen sinngemäß angewendet werden. Der so gewonnene Spannungsansatz wird jedoch — das ist das wesentliche Ergebnis der vorstehenden Überlegungen — ebenso wie beim Stab mit Vollquerschnitt im allgemeinen nur eine Näherung sein, da die zu dem angenommenen Membranspannungszustand exakt gehörenden Formänderungen wegen der vorhandenen Versteifungen oder wegen der Biegesteifigkeit der Schale nicht möglich sind.

Bei der Kegelschale sei mit dem Aufsuchen eines Ansatzes für die Schnittkräfte N begonnen. Der Verformungszustand sei durch die Annahme festgelegt, daß bei torsionsfreier Beanspruchung aus Längskraft, Querkraft und Biegung ein zur Stabachse senkrechter Querschnitt bei der Deformation eben bleibt. Die auf Grund dieser Annahme gewonnene Lösung wird bekanntlich bei zylindrischen Stäben mit der exakten Lösung identisch, wenn der Stab eine reine Biegungsbeanspruchung erfährt. Für kegelförmige Stäbe wird dieses jedoch nicht mehr gelten. Für den einfachen Fall reiner Längskraftbeanspruchung durch eine Zugkraft P ist in Bild 6 ein durch zwei Schnitte $x=$ konst. begrenztes Stabelement vor und nach der Verformung dargestellt. Die Zeichenebene ist dabei eine die Kegelachse enthaltende Schnittebene. Es sei

δ Wandstärke der Schale,
E Elastizitätsmodul,
ε_s Dehnung der Schale in Richtung der Erzeugenden,
$A\,\mathrm{d}x$ Änderung des Abstandes $\mathrm{d}x$ der beiden benachbarten Querschnitte des Stabelementes.

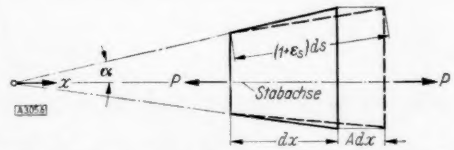


Bild 6. Stabelement der Kegelschale bei Beanspruchung durch Längskraft.

Nach Bild 6 ist dann

$$(1+\varepsilon_s)^2\,\mathrm{d}s^2=(1+A)^2\,\mathrm{d}x^2+\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\mathrm{d}x^2 .$$

Bei Vernachlässigung quadratischer Glieder der Dehnungsgrößen wird

$$\varepsilon_s=A\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2=A\cos^2\alpha .$$

Da in der Schalenfläche keine Längskräfte in Richtung der Krümmungslinien wirken, nimmt das Elastizitätsgesetz für die Schnittkräfte N hier die einfache Form an

$$N^*=E\,\delta\,\varepsilon_s .$$

Nach (3a) ist bei Abwesenheit von Schubkräften

$$N^*=\frac{N}{\cos\omega} .$$

Man erhält also für die Schnittkräfte N

$$N=A\,E\,\delta\cos\omega\cos^2\alpha .$$

[3]) Diese Tatsache widerspricht keineswegs dem Saint-Venantschen Prinzip, das nur dann gilt, wenn die Gleichgewichtsgruppen, über deren Abklingen etwas ausgesagt wird, in einem hinreichend kleinen Gebiet angreifen. Die gesamte Länge der Querschnittskurve, über die sich die hier betrachteten Spannungen verteilen, ist eben schon ein zu großer Bereich der Schalenfläche.

Das gilt nur für eine Beanspruchung durch eine Längskraft P. Wirkt außerdem auf das Stabelement ein Biegemoment M, so ist der obige Ansatz für N der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte entsprechend zu erweitern:

$$N = (A + Bz)\, E\,\delta \cos\omega \cos^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

B ist dabei wie A eine Konstante des betrachteten Querschnitts. Würde der Stab auch durch ein Biegemoment in der x-y-Ebene beansprucht werden, so müßte in (4) in der Klammer noch ein weiteres Glied hinzugefügt werden. Der Einfluß von Verformungen, die durch Schubkräfte hervorgerufen werden, wird natürlich durch den Ansatz (4), wie üblich, vernachlässigt. Selbstverständlich bleibt noch zu prüfen, ob trotz aller Annahmen und Vernachlässigungen die Beziehung (4) zu einer Spannungsverteilung führt, die die Gleichgewichtsbedingungen (2) widerspruchsfrei erfüllt.

Zur Bestimmung der Konstanten A und B dienen die Bedingungen, daß die im Querschnitt übertragenen Schnittkräfte eine Resultierende von der Größe P und ein resultierendes Moment von der Größe M liefern müssen:

$$\oint N \cos\alpha\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = P,$$

$$\oint N \cos\alpha\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = M.$$

$N \cos\alpha$ ist dabei die auf der Querschnittsebene senkrecht stehende Komponente der Kräfte N. Das Zeichen $\oint$ soll andeuten, daß das Integral über die ganze Querschnittskurve, d. h. über alle Winkel φ zu erstrecken ist. Im folgenden sei

$$F = \oint \delta\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi, \qquad J = \oint \delta\, z^2\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi,$$

$$\bar{\delta} = \delta \cos\omega \cos^3\alpha.$$

$$\bar{F} = \oint \bar{\delta}\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi, \qquad \bar{J} = \oint \bar{\delta}\, z^2\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi.$$

$\bar{F}$ und $\bar{J}$ ergeben sich als Fläche und Trägheitsmoment des Querschnittes an der Stelle x, wenn jedem Punkte der Querschnittskurve die Wandstärke $\bar{\delta}$ zugeschrieben wird. Nach Berechnung von A und B wird dann aus (4)

$$N = \frac{\bar{\delta}}{\cos\alpha}\left(\frac{P}{\bar{F}} + \frac{M}{\bar{J}}\, z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

unter der Voraussetzung, daß für die Lage der Achsen y und z die bekannten Bedingungen

$$\oint \bar{\delta}\, y\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0, \quad \oint \bar{\delta}\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0, \quad \oint \bar{\delta}\, y\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0$$

vorgeschrieben werden. Da diese Beziehungen für jede Stelle x gelten sollen, wird dadurch die Stabachse als Verbindungslinie der Schwerpunkte der mit der Wandstärke $\bar{\delta}$ belegten Querschnittskurven definiert. Ferner ist jetzt die Lage der Achsen y und z festgelegt, die den Hauptachsen des Querschnitts mit der Wandstärke $\bar{\delta}$ parallel sein müssen. Schließlich ist noch durch die obigen Bedingungen über den Verlauf der Wandstärke eine bestimmte Voraussetzung getroffen. Damit nämlich die Querschnittsschwerpunkte auch tatsächlich auf einer durch die Kegelspitze gehenden Geraden liegen, muß

$$\delta = f(x)\, f_1(\varphi)$$

sein, wobei f eine reine Funktion von x und f_1 eine reine Funktion von φ ist. Für den Querschnitt an der Stelle $x = a$ sei

$$\delta = \delta_a(\varphi), \quad \bar{\delta} = \bar{\delta}_a(\varphi), \quad f = 1, \quad F = F_a, \quad \bar{F} = \bar{F}_a, \quad J = J_a, \quad \bar{J} = \bar{J}_a.$$

Es gilt nun

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_a f, \quad \bar{F} = \bar{F}_a f \frac{x}{a}, \quad \bar{J} = \bar{J}_a f \frac{x^3}{a^3}, \quad z = z_a \frac{x}{a},$$

so daß man aus (5) unter Benutzung von (1) erhält

$$N = \frac{\bar{\delta}_a}{\cos\alpha}\left\{\frac{P}{\bar{F}_a}\frac{a}{x} + [M_a + Q(x-a)]\frac{z_a}{\bar{J}_a}\frac{a^2}{x^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a).$$

Die Größe der Längskräfte N ist damit für jede Stelle der Schale festgelegt.

6. Die Schubkräfte.

Es sei jetzt nachgewiesen, daß mit dem gewählten Ansatz (5) die Gleichgewichtsbedingungen (2) erfüllt werden können. Hand in Hand damit geht die Bestimmung der Schubkräfte T. Setzt man (5a) in (2b) ein, so folgt

$$\left\{\frac{P}{F_a} + [M_a - Q(x-a)]\frac{z_a}{J_a}\frac{a}{x}\right\}' \bar{\delta}_a \varrho_a + T^{\cdot} = 0,$$

$$-\frac{a^2}{x^2}\left(\frac{M_a}{a} - Q\right)\frac{z_a}{J_a}\bar{\delta}_a \varrho_a + T^{\cdot} = 0.$$

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$\bar{Q} = Q - \frac{M}{x}, \quad \bar{Q}_a = Q - \frac{M_a}{a}.$$

Man erhält dann

$$T^{\cdot} = -\frac{\bar{Q}_a}{\bar{J}_a}\bar{\delta}_a z_a \varrho_a \frac{a^2}{x^2},$$

$$T = C(x) - \frac{\bar{Q}_a}{\bar{J}_a}\frac{a^2}{x^2}\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a z_a \varrho_a \, \mathrm{d}\varphi,$$

wobei C eine nur von x abhängige Funktion ist. Setzt man den Ausdruck für T in (2a) ein, so wird

$$\left(C x - \frac{\bar{Q}_a}{\bar{J}_a}\frac{a^2}{x}\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a z_a \varrho_a \, \mathrm{d}\varphi\right)' + C - \frac{\bar{Q}_a}{\bar{J}_a}\frac{a^2}{x^2}\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a z_a \varrho_a \, \mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$(C x)' + C = 0,$$

$$C = C_a \frac{a^2}{x^2},$$

wenn man vorschreibt, daß C für $x = a$ den Wert C_a annehmen soll. Man erhält dann für die Verteilung der Schubkräfte

$$T = \left(C_a - \frac{\bar{Q}_a}{\bar{J}_a}\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a z_a \varrho_a \, \mathrm{d}\varphi\right)\frac{a^2}{x^2} \quad \text{(6a)}$$

oder in der bequemeren Schreibweise, bei der jedoch die Abhängigkeit von x nicht mehr unmittelbar zum Ausdruck kommt:

$$T = C - \frac{\bar{Q}}{\bar{J}}\int_0^{\varphi}\bar{\delta} z \varrho \, \mathrm{d}\varphi \quad \text{(6).}$$

Artet der Kegel in einen Zylinder aus, so ergibt sich für den Schubfluß die bekannte Formel

$$T = C - \frac{Q}{J}\int_0^{\varphi}\delta z \varrho \, \mathrm{d}\varphi,$$

die sich von (6) nur durch den fehlenden Querstrich über den Größen Q, J und δ unterscheidet. Da die Winkel α und ω klein sind, werden $\bar{J}$ und $\bar{\delta}$ immer nur wenig von J und δ abweichen. Der Betrag $\frac{M}{x}$, um den beim Kegel die Querkraft Q abgemindert werden muß, um $\bar{Q}$ zu erhalten, ist jedoch meist sehr wesentlich. Diese Abminderung erklärt sich anschaulich daraus, daß die Schnittkräfte N Komponenten $N \sin\alpha$ in der Querschnittsebene haben, die zusammen in Richtung von Q gerade den Betrag $\frac{M}{x}$ ausmachen. Es ist nämlich

$$Q - \bar{Q} = \oint N \sin\alpha \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \varrho \, \mathrm{d}\varphi,$$

wobei $\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$ der Kosinus des Winkels ist, den die Komponenten $N \sin\alpha$ mit der z-Achse bilden. Mit

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}\cos\alpha$$

wird dann unter Benutzung von (5)

$$Q - \bar{Q} = \oint \delta \left(\frac{P}{F} + \frac{M_a}{J} z \right) \frac{z}{x} \varrho \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{M}{x},$$

was zu beweisen war. Der Angriffspunkt des Querkraftanteils $\frac{M}{x}$ ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$. Dieses ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß alle Längskräfte N die Stabachse schneiden.

Die Berechnung der Integrationskonstanten C_a erfordert besondere Überlegungen. Die Größe $C = C_a \frac{a^2}{x^2}$ bedeutet für einen bestimmten Querschnitt einen konstanten Schubfluß, der weder in y- noch in z-Richtung eine resultierende Kraft, sondern lediglich ein resultierendes Drehmoment liefert. Gl. (6) gilt in der angegebenen Form nur für eine zweifach zusammenhängende Querschnittsfläche, d. h. also für einen Stab mit einzelligem Querschnitt. Besitzt der Stabquerschnitt mehrere Zellen, so ist es mit den Gleichgewichtsbedingungen verträglich, wenn für jede Zelle eine besondere Konstante C als Schubfluß an der Stelle $\varphi = 0$ vorgeschrieben wird. Die zur Ermittlung von C erforderlichen Rechnungen sollen jedoch auch weiterhin am einzelligen Querschnitt erläutert werden. Über die Verallgemeinerung der aufgestellten Formeln braucht dann später nur noch wenig gesagt zu werden, da die hierzu notwendigen Überlegungen die gleichen sind, wie in dem in der Literatur bereits mehrfach behandelten einfacheren Fall des zylindrischen Stabes. Die Größe C wird zweckmäßig zerlegt in

$$C = C^D + C^Q = \left(C_a^D + C_a^Q \right) \frac{a^2}{x^2}.$$

Die in einem Querschnitt übertragenen Schubkräfte müssen in bezug auf die Stabachse ein resultierendes Moment von der Größe $D + Qc$ ergeben. Es sei nun verlangt, daß die durch C^D dargestellte Schubflußverteilung gerade das Drehmoment D liefert, während C^Q zusammen mit den sonst noch vorhandenen von $\bar{Q}$ abhängigen Schubkräften das Moment Qc liefern soll.

7. Torsionsfreie Verformung. Querkraftmittelpunkt.

Über den Abstand c ist bisher noch nicht verfügt worden. Bei einer bestimmten gegebenen Belastung des Stabes ist D oder c frei wählbar. Im folgenden möge die Frage untersucht werden, wie groß C^Q gewählt werden muß, damit c gerade die y-Koordinate des „Querkraftmittelpunktes" ist. Bei zylindrischen Stäben wird dieser Punkt auch sehr häufig „Schubmittelpunkt" genannt. Hier soll jedoch der ersten Bezeichnung der Vorzug gegeben werden, um damit anzudeuten, daß es sich um einen Punkt handeln soll, in dem die gesamte im Querschnitt übertragene Querkraft Q und nicht etwa nur der von den Schubkräften T übernommene Beitrag $\bar{Q}$ angreift. Der Querkraftmittelpunkt ist derjenige Punkt, durch den Q hindurchgehen muß, damit der Stab an der betrachteten Stelle eine reine Biegungsverformung und keine Torsionsverformung erleidet. Diese Definition ist jedoch zur formelmäßigen Aufstellung der für die Berechnung von C^Q notwendigen Bedingungen noch nicht ausreichend, da ja die Biegungsverformung im Abschnitt 5 lediglich angenähert charakterisiert worden ist und über die Torsionsverformung überhaupt noch nichts gesagt worden ist. Eine präzise Vorschrift über die Ermittlung von C^Q erhält man, wenn man von den durch die Gl. (5) und (6) gegebenen Spannungszuständen ausgeht und zur Festlegung des Querkraftmittelpunktes nach Trefftz[4]) die Formänderungsarbeit benutzt[5]). Der zur reinen Torsionsverformung gehörende Spannungszustand sei durch den Index D, der zur reinen Querkraftbiegung gehörende durch den Index Q gekennzeichnet. Es ist

$$N^D = 0, \qquad T^D = C^D;$$

$$N^Q = \frac{\delta}{\cos a} \frac{M}{J} z, \qquad T^Q = C^Q - \frac{\bar{Q}}{J} \int_0^{\varphi} \delta z \varrho \, \mathrm{d}\varphi.$$

Es soll nun von torsionsfreier Biegung dann gesprochen werden, wenn die beiden Spannungszustände mit den Indizes D und Q zueinander orthogonal sind in dem Sinne, daß der eine Zustand auf den Verschiebungswegen des anderen keine Arbeit leistet. Bei gleichzeitiger Beanspruchung durch Querkraft-Biegung und Torsion kann also die gesamte Formänderungsarbeit additiv aus den Arbeiten der einzelnen Zustände zusammengesetzt werden.

---

[4]) E. Trefftz: Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 222.

[5]) Ein anderer Weg wird von W. T. Koiter: Versl. en Verh. Nat. Luchtvaartlaborat. Amsterdam, Bd. 8 (1939), S. 169, eingeschlagen.

Es sei zunächst allgemein die Formänderungsarbeit ermittelt, die ein aus den Schnittkräften N^{I}, T^{I} bzw. $N^{*\mathrm{I}}$, $T^{*\mathrm{I}}$ bestehender Spannungszustand auf den Verschiebungswegen eines Zustandes N^{II}, T^{II} bzw. $N^{*\mathrm{II}}$, $T^{*\mathrm{II}}$ je Einheit der Schalenmittelfläche leistet. Diese Arbeit sei mit $a_{x,\varphi}^{\mathrm{I,II}}$ bezeichnet und ist, wenn G der Schubmodul ist,

$$a_{x,\varphi}^{\mathrm{I,II}} = \frac{N^{*\mathrm{I}} N^{*\mathrm{II}}}{E\,\delta} + \frac{T^{*\mathrm{I}}\, T^{*\mathrm{II}}}{G\,\delta}.$$

Weitere mit der Querkontraktion behaftete Glieder kommen nicht vor, da in Richtung der Krümmungslinien keine Längskräfte wirken. Nach Einführung der Schnittkräfte des schiefwinkligen Schalenelementes ergibt sich

$$\begin{aligned} a_{x,\varphi}^{\mathrm{I,II}} &= \frac{1}{E\,\delta}\left(\frac{N^{\mathrm{I}}}{\cos\omega} + 2\,T^{\mathrm{I}}\operatorname{tg}\omega\right)\left(\frac{N^{\mathrm{II}}}{\cos\omega} + 2\,T^{\mathrm{II}}\operatorname{tg}\omega\right) + \frac{T^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}}}{G\,\delta} \\ &= \frac{N^{\mathrm{I}} N^{\mathrm{II}}}{E\,\delta}\,\frac{1}{\cos^2\omega} + \frac{T^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}}}{G\,\delta}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right) + \frac{N^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}} + T^{\mathrm{I}} N^{\mathrm{II}}}{E\,\delta}\,\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega}. \end{aligned}$$

Das schiefwinklige Schalenelement hat die Fläche $\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s\cos\omega = \varrho\,\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x$. Die im folgenden mit $A_x^{\mathrm{I,II}}$ bezeichnete Arbeit des Stabes je Längeneinheit der Stabachse an der Stelle x ergibt sich dann durch Integration über alle φ zu

$$\left.\begin{aligned} A_x^{\mathrm{I,II}} &= \oint a_{x,\varphi}^{\mathrm{I,II}}\,\varrho\,\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\,\mathrm{d}\varphi, \\ A_x^{\mathrm{I,II}} &= \oint\left[\frac{N^{\mathrm{I}} N^{\mathrm{II}}}{E\,\delta}\,\frac{1}{\cos^2\omega} + \frac{T^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}}}{G\,\delta}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right) + 2\,\frac{N^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}} + T^{\mathrm{I}} N^{\mathrm{II}}}{E\,\delta}\,\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega}\right]\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Setzt man in (7)

$$N^{\mathrm{I}} = N^{D}, \quad T^{\mathrm{I}} = T^{D}, \quad N^{\mathrm{II}} = N^{Q}, \quad T^{\mathrm{II}} = T^{Q}$$

und verlangt, daß $A_x^{D,Q}$ zu Null wird, so folgt

$$\oint\left\{\frac{1}{G\,\delta}\,C^{D}\left(C^{Q} - \frac{\bar{Q}}{J}\int_0^{\varphi}\delta\,z\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right) + \frac{2}{E\,\delta}\,C^{D}\,\frac{\delta}{\cos\alpha}\,\frac{M}{J}\,z\,\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega}\right\}\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

oder

$$\oint\left\{\frac{1}{\delta}\left(C^{Q} - \frac{\bar{Q}}{J}\int_0^{\varphi}\delta\,z\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right)\cos^2\omega\cos^2\alpha + 2\,\frac{G}{E}\,\frac{M}{J}\,z\sin\omega\cos\alpha\right\}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Aufgelöst nach C^{Q} ergibt sich

$$C^{Q} = Q\,k_1 + M\,k_2 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

mit

$$k_1 = \frac{1}{J}\,\frac{\oint\frac{1}{\delta}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right)\cos^2\omega\cos^2\alpha\left(\int_0^{\varphi}\delta\,z\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right)\varrho\,\mathrm{d}\varphi}{\oint\frac{1}{\delta}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right)\cos^2\omega\cos^2\alpha\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi},$$

$$k_2 = -2\,\frac{G}{E}\,\frac{1}{J}\,\frac{\oint z\sin\omega\cos\alpha\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi}{\oint\frac{1}{\delta}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\operatorname{tg}^2\omega\right)\cos^2\omega\cos^2\alpha\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi}.$$

Wird wieder alles auf den Querschnitt an der Stelle $x = a$ bezogen, so erhält man

$$k_1 = k_{1a}\,\frac{a}{x}, \quad k_2 = k_{2a}\,\frac{a^2}{x^2}, \quad M = M_a + Q\,(x - a);$$

$$\bar{Q} = Q - \frac{1}{x}\,[M_a + Q\,(x - a)] = \bar{Q}_a\,\frac{a}{x}$$

und damit

$$C^{Q} = \{\bar{Q}_a\,k_{1a} + [M_a + Q\,(x - a)]\,k_{2a}\}\,\frac{a^2}{x^2} \quad \ldots\ldots \quad (8a).$$

Zur anschaulichen Deutung der durch die Gl. (8) und (8a) gewonnenen Aussage wird zweckmäßig die Koordinate c des Querkraftmittelpunktes berechnet. Bild 7 zeigt den Stabquerschnitt an der Stelle x. Längs der Querschnittskurve greifen die Schubkräfte T^Q an. An Stelle der in der Querschnittsebene wirkenden Komponenten der Längskräfte N ist deren Resultierende $\frac{M}{x}$ eingetragen, von der bereits bekannt ist, daß sie durch die Stabachse hindurchgeht. Die im Abstand c angreifende Querkraft Q muß nun um die Stabachse dasselbe Moment liefern wie die Schubkräfte T^Q. Ist r das Lot vom Punkte $x=0$, $y=0$ auf die Tangente an die Querschnittskurve, so ergibt sich

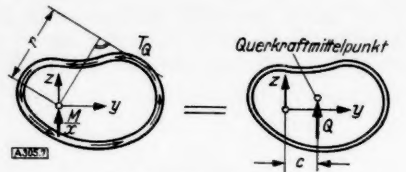


Bild 7. Stabquerschnitt.

$$Qc=\oint T^Q\, r\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=(\bar{Q}\,k_1+M\,k_2)\,2\,\mathfrak{F}-\frac{\bar{Q}}{J}\oint\left(\int_0^{\varphi}\bar{\delta}\,z\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right)r\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi,$$

wenn $\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\oint r\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi$ die von der Querschnittskurve umschlossene Fläche bedeutet. Mit $M=(Q-\bar{Q})\,x$ erhält man

$$c=\frac{\bar{Q}}{Q}\left[2\,\mathfrak{F}\,(k_1-k_2\,x)-\frac{1}{J}\oint\left(\int_0^{\varphi}\bar{\delta}\,z\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right)r\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right]+2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und mit $r=r_a\,\frac{x}{a}$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_a\,\frac{x^2}{a^2}$:

$$c=\frac{\bar{Q}_a}{Q}\left[2\,\mathfrak{F}_a\,(k_{1a}-k_{2a}\,a)-\frac{1}{J_a}\oint\left(\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a\,z_a\,\varrho_a\,\mathrm{d}\varphi\right)r_a\,\varrho_a\,\mathrm{d}\varphi\right]+2\,\mathfrak{F}_a\,k_{2a}\,x \quad . \quad . \quad (9\mathrm{a}).$$

Als wichtigste Aussage folgt aus (9a), daß c nicht wie bei zylindrischen Stäben eine Konstante ist, sondern eine von x und von dem durch die Belastung bedingten Verhältnis $\frac{\bar{Q}}{Q}$ linear abhängige Größe. Die Abhängigkeit von x bedeutet, daß nur für einen bestimmten Querschnitt und nicht für den ganzen Stab torsionsfreie Biegungsverformung erzielt werden kann. Da sich für die z-Koordinate des Querkraftmittelpunktes, Gl. (9a) entsprechend, ebenfalls eine lineare Abhängigkeit von x ergibt, ist die Verbindungslinie der Querkraftmittelpunkte, die Querkraftmittellinie, eine Gerade. Die Winkel, die diese Gerade mit den Richtungen der Koordinatenachsen bildet, sind bei gegebenen Abmessungen des Stabes konstant. Im übrigen ist jedoch die Lage der Geraden eine Funktion der Belastung. Besteht die Belastung des Stabes aus einer in der Kegelspitze angreifenden Einzellast, so wird $\bar{Q}=0$; die Querkraftmittellinie ist dann eine durch die Kegelspitze hindurchgehende Gerade. Wird jedoch $Q=0$, so geht c nach unendlich. Dieses erklärt sich durch die Tatsache, daß die querkraftfreie Biegung nicht torsionsfrei ist. Um bei $Q=0$ verdrehungsfreie Verformung zu erzielen, ist es vielmehr notwendig, noch zusätzlich ein Drehmoment aufzubringen; hierzu ist bei im Grenzfall verschwindender Querkraft ein unendlich großer Abstand c erforderlich.

An die der Beziehung (8) zu Grunde liegenden Arbeitsgleichung sei noch folgende Bemerkung geknüpft. Man gelangt zu derselben Gleichung, wenn man vorschreibt, daß der konstante Schubfluß C^Q gerade so groß gewählt werden soll, daß er auf den Verschiebungswegen des gesuchten Spannungszustandes N^Q, T^Q keine Arbeit leistet. Wegen dieser Orthogonalitätsbedingung stimmt die durchzuführende Rechnung rein formal mit der Berechnung eines statisch unbestimmten Systems genau überein. Die Größe C^Q entspricht der Unbekannten, die Schnittkräfte mit $C^Q=0$ entsprechen der Spannungsverteilung am statisch bestimmten Hauptsystem. Die Analogie läßt sich an einem geeigneten Modell[6]) soweit vervollständigen, daß man dort auch die Verschiebungswerte, die bei der Berechnung des statisch unbestimmten Systems auftreten, anschaulich deuten kann. Diese Methode ist vor allem bei mehrzelligen Querschnitten zylindrischer Stäbe zweckmäßig; ihre Anwendung dürfte sich jedoch bei den komplizierteren Beziehungen, die für kegelförmige Stäbe gelten, weniger lohnen.

Es sei jetzt kurz auf die Verhältnisse bei mehrzelligen Querschnitten eingegangen. Wie bereits erwähnt, sind die in diesem Falle notwendigen besonderen Rechnungen im Prinzip bei

[6]) Vom Verfasser ist in Ing.-Arch. Bd. 8 (1937), S. 25, für zylindrische Stäbe vorgeschlagen worden, den Stabquerschnitt als ein Rahmensystem aufzufassen, das senkrecht zu seiner Ebene durch eine gedachte Belastung geeignet beansprucht wird.

einem Kegel dieselben wie bei einem zylindrischen Stab [7]). Die Längskräfte N^Q des Spannungszustandes reiner Querkraft-Biegung sind nach wie vor durch Gl. (5) mit $P=0$ gegeben. Die Verteilung der Schubkräfte T^Q ändert sich insofern, als jetzt in jeder Zelle eine Größe C^Q an der Stelle unbekannt ist, wo der Weg des Integrals $\int\limits_0^\varphi \bar{\delta}\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi$ beginnt. Beim Spannungszustand reiner Torsion wirkt in jeder Zelle ein für die einzelnen Zellen verschieden großer konstanter Schubfluß C^D. Das resultierende Moment aller Schubkräfte muß die Größe D haben. Über die Aufteilung des Momentes D auf die einzelnen Zellen braucht jedoch nichts vorausgesetzt zu werden. Aus der Bedingung, daß die Arbeit des Zustandes mit den Schnittkräften N^Q, T^Q auf den Verschiebungswegen jeder einzelnen Konstanten C^D verschwinden muß, ergeben sich bei einem Stabquerschnitt mit n Zellen n Gleichungen zur Bestimmung der n Unbekannten. Dabei zeigt sich, daß das entstehende Gleichungssystem bei den praktisch in Frage kommenden Querschnittsformen in dreigliedriger Form erhalten werden kann.

Zur Ergänzung der bisherigen Untersuchungen über die torsionsfreie Verformung ist noch nachzuweisen, daß bei dem gewählten Spannungsansatz (5) die reine Zug- oder Druckbeanspruchung des Stabes durch eine Kraft P verdrehungsfrei ist. In (7) ist jetzt

$$N^{\mathrm{I}} = N^D = 0, \qquad T^{\mathrm{I}} = T^D = C^D,$$

$$N^{\mathrm{II}} = N^P = \frac{\bar{\delta}}{\cos\alpha}\frac{P}{\bar{F}}, \qquad T^{\mathrm{II}} = T^P = 0$$

zu setzen. Man erhält dann

$$A_x^{D,P} = \oint \frac{2}{E\,\delta}\, C^D \frac{\bar{\delta}}{\cos\alpha}\frac{P}{\bar{F}}\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2\,C^D P}{E\,\bar{F}}\oint \sin\omega\cos\alpha\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi .$$

Mit $\sin\omega = \frac{x}{\varrho}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^{\cdot}$ wird

$$A_x^{D,P} = \frac{2\,C^D P}{E\,\bar{F}}\, x \oint \cos\alpha\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 0 ,$$

da die obere und untere Grenze des Integrals, das gleich $\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$ ist, übereinstimmen und $\cos\alpha$ stets positiv ist.

8. Reine Verdrehung. Drillruhepunkt.

Während die torsionsfreie Verformung des Stabes bereits zur Aufstellung des Ansatzes (5) klargestellt worden ist, ist von der reinen Verdrehbeanspruchung bisher nur der Spannungszustand, aber nicht der Verformungszustand betrachtet worden. Zur Ermittlung des letzteren sei wieder von der schon in Abschnitt 5 benutzten Annahme ausgegangen, daß durch die vorhandenen Versteifungen bzw. durch den Biegewiderstand der Mittelfläche der Schale eine Verformung vorgeschrieben wird, die der eines Stabes mit Vollquerschnitt entspricht. Die bekannte strenge Theorie der Torsion zylindrischer Stäbe liefert die Aussagen, daß die Verformung in einer Verdrehung der einzelnen Querschnitte besteht, wobei die Gestalt des Querschnittes in ihrer Projektion in Richtung der Stabachse exakt erhalten bleibt, während parallel zur Stabachse im allgemeinen eine Verwölbung auftritt. Es erscheint durchaus einleuchtend, das gleiche Verformungsbild auch bei stabförmigen Membranschalen vorauszusetzen, da z. B. aussteifende Rippen bei Beanspruchung senkrecht zu ihrer Ebene hinreichend weich sind, um eine Querschnittsverwölbung nicht merklich zu verhindern. Die in Frage stehende Annahme ist bei zylindrischen Membranschalen üblich und hat sich dort auch zweifellos bewährt [8]). Überträgt man sie auch auf Kegelschalen, so wird die entstehende Lösung im allgemeinen nicht mehr wie bei Zylinderschalen mit den Verformungsbedingungen am einzelnen Schalenelement exakt verträglich sein [9]); die tatsächliche Verformung wird vielmehr nur im Mittel

[7]) Über mehrzellige Querschnitte zylindrischer Stäbe vergleiche man W. J. Goodey: Aircr. Engng. Bd. 8 (1936), S. 93; A. Pflüger: a. a. O.; H. Ebner: Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 182; B. Radomski: Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 70.

[8]) M. Vinsonneau: Rev. techn. Aeronaut. Bd 7 (1938), S. 7, empfiehlt allerdings, bei Berechnung der Verdrehung zylindrischer Schalen gerade die entgegengesetzte Annahme behinderter Querschnittsverwölbung an die Spitze der ganzen Untersuchung zu stellen.

[9]) Ein Weg zur exakten Lösung des Torsionsproblems kegelförmiger Stäbe beliebiger Querschnittsgestalt wird gezeigt bei D. Panov: C. R. Acad. Sci. URSS., N. s. 20 (1938), S. 251.

eine Verdrehung darstellen. Die dadurch bei Kegeln neu hinzukommende Fehlermöglichkeit bewegt sich jedoch im Rahmen der Genauigkeit der übrigen Rechnung, da ja die gleiche Unsicherheit für die Querkraft-Biegung auch schon bei zylindrischen Stäben besteht.

Es sei ψ der Winkel, um den sich bei der Verformung ein Querschnitt aus seiner Nulllage heraus dreht. Die Ableitung von ψ nach x ist dann der gewöhnlich als Verdrehwinkel je Längeneinheit bezeichnete Winkel, um den sich zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander verdrehen. Zur Durchführung der für die Ermittlung von ψ bzw. ψ' erforderlichen Mittelbildung wird zweckmäßig die Formänderungsarbeit benutzt. Nach (7) ergibt sich die Arbeit, die der Zustand reiner Torsion mit dem Schubfluß $T^D = C^D = \frac{D}{2\mathfrak{F}}$ beim Aufbringen des Drehmomentes D leistet, zu

$$A_x^{D,D} = \frac{1}{2} \oint \frac{D^2}{4\,G\,\delta\,\mathfrak{F}^2}\left(1 + 4\,\frac{G}{E}\,\mathrm{tg}^2\,\omega\right)\frac{\cos\omega}{\cos\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \oint \frac{D^2}{4\,G\,\delta\,\mathfrak{F}^2}\left(1 + \quad \frac{G}{E}\,\mathrm{tg}^2\,\omega\right)\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi,$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt wird, weil es sich um die Arbeit eines Spannungszustandes auf seinen eigenen Verschiebungswegen handelt. Ausgedrückt durch den Verdrehwinkel muß für die Formänderungsarbeit gelten

$$A_x^{D,D} = \frac{1}{2}\,D\,\psi'.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $A_x^{D,D}$ bekommt man

$$\psi' = \frac{D}{4\,G\,\mathfrak{F}^2} \oint \frac{1}{\delta}\,\,1 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\omega)\,\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

oder bezogen auf den Querschnitt an der Stelle $x = a$

$$\psi' = \frac{D}{4\,G\,\mathfrak{F}_a^2}\,\frac{a^4}{x^4 f} \oint \frac{1}{\delta_a}\,(1 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\omega)\,\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (10\mathrm{a}).$$

Nach der exakten Torsionstheorie zylindrischer Stäbe ist der Verdrehwinkel ψ' eine für alle x konstante Größe. Man erkennt aus (10a), daß hier $f = \frac{a^4}{x^4}$ sein muß, wenn (bei konstantem D) ψ' ebenfalls von x unabhängig werden soll. Wird die Verdrehsteifigkeit mit $G\,J_D$ bezeichnet, so folgt J_D aus der Definitionsgleichung $G\,J_D\,\psi' = D$ zu

$$J_D = \frac{4\,\mathfrak{F}^2}{\oint \frac{1}{\delta}\,(1 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\omega)\,\frac{\cos^2\omega}{\cos^2\alpha}\,\varrho\,\mathrm{d}\varphi}.$$

Der Punkt, um den sich bei der Belastung durch ein Drehmoment D zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander drehen, wird als „Drillruhepunkt" bezeichnet. Da von der Wandstärke δ vorausgesetzt war, daß sie sich in ihrem Verlauf längs der Querschnittskurve für verschiedene Querschnitte nur durch einen von x abhängigen Faktor unterscheidet, folgt, daß bei der Kegelschale die Verbindungslinie der Drillruhepunkte, die Drillachse, eine durch die Kegelspitze hindurchgehende Gerade sein muß. Im folgenden sei

$e = e_a \frac{x}{a}$ Abstand des Drillruhepunktes von der z-Achse,

u Verschiebung eines Punktes der Schalenmittelfläche in Richtung der Erzeugenden bei reiner Verdrehbeanspruchung.

Zur Ermittlung des Drillruhepunktes werden die Ergebnisse des Abschnittes 7 über torsionsfreie Verformung benutzt. Zunächst sei kurz auf den einfachen Fall eines zylindrischen Stabes eingegangen. Hierbei ergibt sich bekanntlich, daß die Querkraftmittellinie und die Drillachse identisch sind. Zum Beweise wird gewöhnlich ein eingespannter Balken (Bild 1) betrachtet[10]), der an seinem freien Ende nur durch eine in Richtung der z-Achse wirkende Einzellast beansprucht wird. Der Angriffspunkt der Einzellast soll der Querkraftmittelpunkt sein, so daß die Arbeit zu Null wird, die der im Stab durch die Belastung hervorgerufene Spannungszustand bei einer reinen Verdrehung leistet. Diese Bedingung läßt sich aber nicht

[10]) Vgl. z. B. A. Föppl: Drang und Zwang Bd. 2, München und Berlin 1928, S. 129.

nur durch die Arbeit der inneren Kräfte, sondern auch durch die der äußeren Kräfte ausdrücken. Die äußeren Kräfte bestehen am freien Ende des Stabes aus der Einzelkraft und an der Einspannstelle aus der Auflagerkraft und dem Einspannmoment. Die Auflagerkraft leistet bei einer Verdrehung des Stabes von vornherein keine Arbeit. Die Arbeit der Einzellast wird dann zu Null, wenn sich der Stab gerade um die Querkraftmittellinie dreht. Um aussagen zu können, daß Drillachse und Querkraftmittellinie zusammenfallen, muß also nur noch bestätigt werden, daß die Arbeit verschwindet, die das Einspannmoment auf den Verschiebungswegen der zur Torsion gehörigen Verwölbung leistet. Die Erfüllung dieser Bedingung läßt sich in der Theorie der Torsion zylindrischer Stäbe bei Berechnung der Verwölbungen u leicht nachweisen [11]). Mit den hier benutzten Bezeichnungen lautet die Bedingung für eine zylindrische Membranschale

$$\oint \delta\, u\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0 \quad \text{für } a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Die Betrachtung sei jetzt auch auf Kegelschalen ausgedehnt. Hier wird man nicht mehr voraussetzen dürfen, daß eine Gl. (11) entsprechende Beziehung uneingeschränkt Gültigkeit hat. Es läßt sich nämlich schon unmittelbar durch die Anschauung bestätigen, daß die Punkte einer Querschnittskurve auch dann Verschiebungen u erleiden, wenn sich ein Stabelement, wie es etwa in Abb. 8 dargestellt ist, als starrer Körper um die Drillachse dreht, d. h. also, wenn $\psi' = 0$ aber $\psi \neq 0$ ist. Bei einer derartigen Verwölbung, die eine Drehung der Querschnittsebene um die y-Achse mit sich bringt, wird aber zweifellos ein in dem betreffenden Querschnitt angreifendes Biegemoment Arbeit leisten. Es dürfte jedoch durchaus plausibel sein, wenn man in Übereinstimmung mit den bisherigen Annahmen über die Ähnlichkeit der Verformungen eines kegelförmigen Stabes und eines gewöhnlichen zylindrischen Stabes voraussetzt, daß für $\psi = 0$, also z. B. an der Einspannstelle eines Freiträgers die Verschiebungen u derart beschaffen sind, daß mit hinreichender Näherung die Arbeit eines Biegemomentes bei der Verwölbung zu Null wird. Es soll also angenommen werden

$$\oint \frac{\bar{\delta}}{\cos a}\, z\, u_{\psi=0}\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

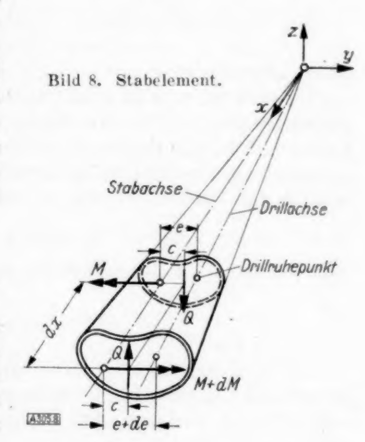


Bild 8. Stabelement.

Die Lage des Drillruhepunktes ergibt sich nun, wenn man die bei Verdrehung geleistete Arbeit eines Stabelementes gleich Null setzt, das nach Bild 8 durch Biegemomente und durch im Querkraftmittelpunkt angreifende Querkräfte belastet wird. Die durch $\mathrm{d}x$ dividierte Arbeit des Stabelementes ist

$$A_x^{D,Q} = \left[Q\,(e-c)\,\psi + \oint N^Q\, u\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi\right]'$$

$$= Q\,[(e-c)\,\psi' - e'\,\psi] + \frac{M}{J}\oint \frac{\bar{\delta}}{\cos a}\, z\, u'\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi + \oint \left(\frac{\bar{\delta}}{\cos a}\,\frac{M}{J}\, z\, \varrho\right)' u\, \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Das letzte der beiden Integrale kann, wie folgt, umgeformt werden:

$$\oint \left(\frac{\bar{\delta}}{\cos a}\,\frac{M}{J}\, z\, \varrho\right)' u\, \mathrm{d}\varphi = \oint \left\{\frac{\bar{\delta}_a}{\cos a}\,[M_a + Q\,(x-a)]\,\frac{z_a}{J_a}\,\varrho_a\,\frac{a}{x}\right\}' u\, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \oint \frac{\bar{\delta}_a}{\cos a}\, \bar{Q}_a\, \frac{z_a}{J_a}\, \varrho_a\, \frac{a^2}{x^2}\, u\, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\bar{Q}}{J} \oint \frac{\bar{\delta}}{\cos a}\, z\, u\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi .$$

Man erhält dann

$$Q\,[(e-c)\,\psi' - e'\,\psi] + \frac{M}{J}\oint \frac{\bar{\delta}}{\cos a}\, z\, u'\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi + \frac{\bar{Q}}{J}\oint \frac{\bar{\delta}}{\cos a}\, z\, u\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0 .$$

Die so gewonnene Beziehung muß für jeden möglichen Wert des Drehwinkels ψ und des Biegemomentes M gelten. Insbesondere muß sie auch dann richtig sein, wenn infolge geeigneter Stützung und Belastung des Stabes an der betrachteten Stelle x die Größen ψ und M gerade zu Null werden. In diesem Fall gilt dann

[11]) Vgl. z. B. H. Neuber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 93.

$$(e - c_{M=0})\,\psi' + \frac{1}{J}\oint \frac{\bar{\delta}}{\cos\alpha}\, z\, u_{\psi=0}\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Daraus folgt bei Benutzung der Annahme (12)

$$e = c_{M=0}$$

und nach (9) und (9a)

$$e = 2\,\mathfrak{F}\,k_1 - \frac{1}{J}\oint\left(\int_0^{\varphi}\bar{\delta}\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi\right) r\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13),$$

$$e = \left[2\,\mathfrak{F}_a k_{1a} - \frac{1}{\bar{J}_a}\oint\left(\int_0^{\varphi}\bar{\delta}_a\, z_a\, \varrho_a\, \mathrm{d}\varphi\right) r_a\, \varrho_a\, \mathrm{d}\varphi\right]\frac{x}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13\mathrm{a}).$$

Die Koordinaten des Drillruhepunktes und des Querkraftmittelpunktes stimmen also dann überein, wenn der Stab an der betreffenden Stelle nur durch eine Querkraft, aber nicht durch ein Biegemoment beansprucht wird. Die Ausdrücke (9) und (9a) können damit unter Benutzung von (13) und (13a) in der kürzeren Form

$$c = \frac{\bar{Q}}{Q}(e - 2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x) + 2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x$$

$$= \frac{\bar{Q}_a}{Q}(e_a - 2\,\mathfrak{F}_a\,k_{2a}\,a) + 2\,\mathfrak{F}_a\,k_{2a}\,x$$

geschrieben werden.

Ist Q sehr klein, so wird die Benutzung der Größe c für praktische Rechnungen unzweckmäßig. Zur Ermittlung von D kann dann folgende Beziehung von Interesse sein. Es sei mit D_e die Summe der Momente aller in einem Querschnitt übertragenen Schnittkräfte in bezug auf den Drillruhepunkt bezeichnet. Zwischen D_e und der bisher benutzten Größe D besteht der Zusammenhang

$$D = D_e + Q\,(e - c)$$

$$= D_e + Q\,e - \bar{Q}\,(e - 2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x) - Q\,2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x$$

$$= D_e + \frac{M}{x}(e - 2\,\mathfrak{F}\,k_2\,x)\,.$$

Für mehrzellige Querschnitte behalten alle für die reine Verdrehbeanspruchung bereits gewonnenen Ergebnisse weitgehend ihre Gültigkeit. Die durchzuführende Rechnung erschwert sich lediglich dadurch, daß das Drehmoment D auf die einzelnen Zellen den getroffenen Annahmen entsprechend aufgeteilt werden muß. Da vorausgesetzt war, daß die Stabverformung bei Torsionsbeanspruchung in einer Verdrehung besteht, muß die Aufteilung so erfolgen, daß sich alle Zellen um den gleichen Winkel ψ' verdrehen.

9. Vereinfachungen für die praktische Rechnung.

In den vorstehenden Abschnitten ist eine ganze Reihe von Annahmen enthalten, die der technischen Balkenbiegungslehre entnommen sind. Die besonderen durch die stabförmige Gestalt des Kegels bedingten Beziehungen für die Spannungsverteilung am einzelnen Schalenelement sind dagegen ohne irgendwelche Vernachlässigungen aufgestellt worden. So notwendig diese Exaktheit zunächst war, so ergibt sich doch nachträglich die Möglichkeit, die abgeleiteten Formeln für praktische Rechnungen noch zu vereinfachen. Infolge der stabförmigen Gestalt des untersuchten Kegels werden die Winkel α und ω, die für einen Zylinder zu Null werden, immer kleine Größen sein. Es wird daher häufig zulässig sein, $\cos\alpha$ und $\cos\omega$ angenähert gleich Eins zu setzen und $\sin\alpha$ bzw. $\sin\omega$ gegenüber Eins zu vernachlässigen. Es wird dann

$$\bar{\delta} \sim \delta, \qquad \bar{F} \sim F, \qquad \bar{J} \sim J.$$

Damit wird aus den Gl. (5) und (6)

$$N \sim \delta\left(\frac{P}{F} + \frac{M}{J}\,z\right),$$

$$T \sim C - \frac{\bar{Q}}{J}\oint \delta\, z\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi\,.$$

Der Ansatz für die Normalspannungen ist jetzt der gleiche wie bei einem zylindrischen Stab; bei den Schubkräften sind jedoch die besonderen Vorschriften über die Berechnung von C

und die Abminderung der Querkraft nach wie vor zu beachten. Für die Größen k_1 und k_2 bekommt man

$$k_1 \sim \frac{1}{J} \frac{\oint \frac{1}{\delta} (\int\limits_0^\varphi \delta z \varrho \, d\varphi) \varrho \, d\varphi}{\oint \frac{1}{\delta} \varrho \, d\varphi}, \qquad k_2 \sim 0.$$

Für die Lage des Drillruhepunktes ergibt sich damit die Formel

$$e \sim 2 \mathfrak{F} k_1 - \frac{1}{J} \oint (\int\limits_0^\varphi \delta z \varrho \, d\varphi) r \varrho \, d\varphi,$$

die wieder mit der für einen Zylinder gültigen Beziehung übereinstimmt. Für den Querkraftmittelpunkt bekommt man

$$c \sim \frac{\bar{Q}}{Q} e = \frac{\bar{Q}_a}{Q} e_a .$$

Da c nicht mehr von x abhängig ist, muß die Querkraftmittellinie eine Parallele zur Stabachse sein. Das bedeutet, daß man jetzt für den ganzen Stab und nicht nur für eine bestimmte Stelle bei geeigneter Belastung torsionsfreie Verformung erreichen kann. Die Beziehung für c dürfte anschaulich besonders einleuchtend sein: Da das Moment von Q um die Stabachse gleich dem Produkt $\bar{Q} e$ ist, muß der Angriffspunkt des Querkraftanteils $\bar{Q}$ der Drillruhepunkt sein. Man bekommt also die in Bild 9 dargestellten Verhältnisse. Die Resultierende der Schubkräfte wirkt in demselben Punkt, durch den sie auch bei einem zylindrischen Stab hindurchgeht. Der ganze Unterschied in der Berechnung eines Kegel- und eines Zylinderquerschnitts ist nur noch durch den im Schwerpunkt angreifenden Querkraftanteil $\frac{M}{x}$ bedingt. Zwischen dem Drehmoment D um den Querkraftmittelpunkt und dem Drehmoment D_e um den Drillruhepunkt besteht der Zusammenhang

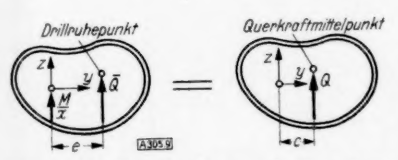


Bild 9. Angriffspunkte der Querkraftanteile bei torsionsfreier Verformung nach der Näherungsrechnung.

$$D \sim D_e + \frac{M}{x} e.$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung läßt sich nun die gesamte durchzuführende Rechnung in der folgenden einfachen Regel zusammenfassen:

> Die Spannungsberechnung einer stabförmigen Membran-Kegelschale kann in erster Näherung genau so wie für einen zylindrischen Stab erfolgen; es ist lediglich an Stelle der Querkraft Q eine um den Betrag $\frac{M}{x}$ verminderte Querkraft und an Stelle des Drehmomentes um den Drillruhepunkt ein um den Betrag $\frac{M}{x} e$ vergrößertes Drehmoment einzusetzen.

10. Versuche mit einer Kegelschale.

Zur Nachprüfung der in den vorstehenden Abschnitten entwickelten Theorie wurden an einer Kegelschale aus Leichtmetall (Al-Cu-Mg-Legierung) Spannungs- und Verformungsmessungen vorgenommen [12]). Die Abmessungen des Versuchsstückes gehen aus Bild 10 hervor. An beiden Enden ist die Schale durch kräftige Stahlplatten abgeschlossen, während sie im Innern durch gebördelte Rippen ausgesteift wird. Die Querschnittskurve hat rechteckige Gestalt. Die Wandstärke beträgt für drei Seiten des Rechtecks 3 mm und für die vierte (kurze) Seite 1 mm. Es läßt sich nachweisen [13]), daß eine zylindrische Schale gleicher Querschnittsabmessungen verwölbungsfrei ist. Nach den Ausführungen von Abschnitt 8 wird dann bei der Kegelschale die Verwölbung mit guter Näherung so vor sich gehen, daß die Querschnittsebene bei der Verdrehung eine Ebene bleibt. Die die Schale abschließenden Stahlplatten werden also durch Verwölbungskräfte nicht beansprucht, so daß eine Differenz zwischen Theorie und Versuch infolge behinderter Querschnittsverwölbung nicht befürchtet zu werden braucht. Die in den

[12]) Diese Versuche wurden in der Werkstoffversuchsabteilung der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen, von H. Mester durchgeführt.

[13]) H. Neuber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 94.

Ecken der Schale zur Verbindung der Bleche erforderlichen Winkel und die zur Verstärkung der Einspannstelle aufgenieteten Laschen bedingen allerdings eine geringe Änderung der Verhältnisse, die jedoch, wie die Versuchsergebnisse zeigen, hinreichend klein ist, um sich für die Spannungsverteilung im mittleren Teil der Schale nicht mehr bemerkbar zu machen. Der Kegel wurde an dem Endquerschnitt mit den kleineren Abmessungen an einem Gerüst fest eingespannt, während er an dem anderen Ende belastet wurde. Die gewählte Art der Lagerung und Krafteinleitung ist aus dem Lichtbild, Bild 11, zu erkennen, das die Schale bei Verdrehbeanspruchung zeigt. Die Einleitung der Kräfte erfolgte am Endquerschnitt mit den größeren Abmessungen, weil auf diese Weise der Angriffspunkt einer Kraft im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen am genauesten festgelegt werden konnte.

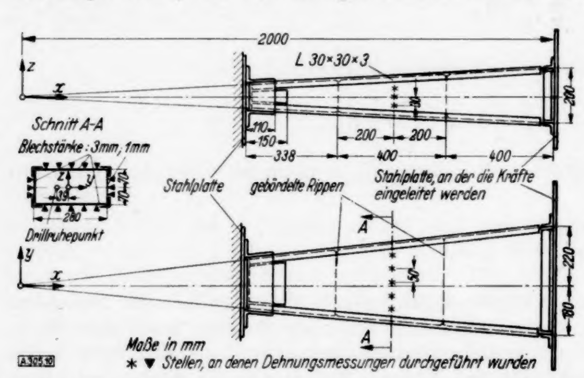
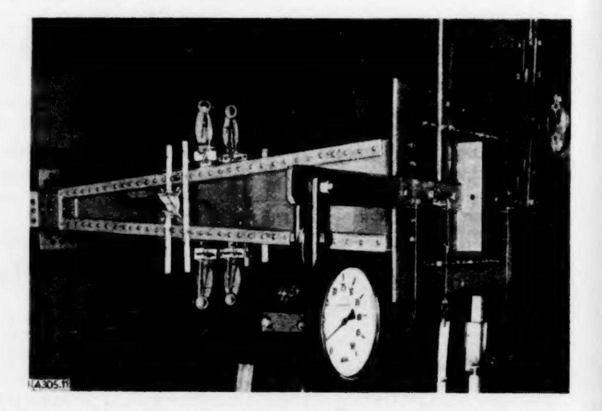


Bild 10 (oben). Skizze des Versuchsstückes.

Bild 11 (rechts). Lichtbild des Versuchsstückes bei Verdrehbeanspruchung.



Zur Ermittlung des Spannungszustandes wurden für einen Querschnitt zwischen den beiden Rippen Dehnungsmessungen an den in Bild 10 angegebenen Stellen durchgeführt. (Vgl. auch Bild 11, auf der einige Meßgeräte zu erkennen sind.) Obwohl der Querschnitt eine Symmetrieachse besitzt, wurden doch in beiden Querschnittshälften Meßstellen angeordnet, um die Möglichkeit zu haben, durch Mittelbildung der sich entsprechenden Meßwerte den Einfluß von Ungenauigkeiten in der Form der Schale ausgleichen zu können. Die in der Theorie enthaltene Voraussetzung eines Membranspannungszustandes verlangt, daß Biegespannungen in der Schalenfläche nicht auftreten können. Praktisch sind jedoch stets derartige Spannungen vorhanden. Für die Dimensionierung der Schale sind sie zwar ohne Interesse, da das Material bei Überschreitung der Fließgrenze in den äußeren Fasern des Bleches durch Spannungsausgleich von selbst dafür sorgt, daß die von der Membrantheorie gelieferten Mittelwerte der Spannungen eingehalten werden; bei Spannungsmessungen im elastischen Bereich müssen sie jedoch berücksichtigt werden, wenn man eine brauchbare Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung erhalten will. Das übliche Verfahren zur Elimination der Biegespannungen besteht darin, daß an einer Stelle der Schale der Spannungszustand auf beiden Seiten des Bleches gemessen und von den Messungen das Mittel gebildet wird. Diese Methode wär im vorliegenden Fall nicht anwendbar, da das Versuchsstück nur von einer Seite zugänglich war. Die Ermittlung der Biegungsspannungen war jedoch durch Verwendung besonderer Meßgeräte möglich, die außer der Dehnung auch noch die Beulung des Bleches anzeigen [14]).

In den Bildern 12 und 13 sind bei zwei verschiedenen Beanspruchungszuständen für die Längskräfte N und die Schubkräfte T die Ergebnisse von Theorie und Messung einander gegenübergestellt. Die beiden Spannungszustände wurden dadurch erzeugt, daß am freien Ende der Schale eine Einzelkraft von 1000 kg einmal in Richtung der y- und einmal in Richtung der z-Achse wirkte. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch kann als durchaus befriedigend bezeichnet werden. Die in den Bildern 12b und 13b eingetragenen gestrichelten Kurven geben den Verlauf der Schubkräfte T wieder, wie er sich nach einer Rechnung ergibt, bei der der Kegel als zylindrischer Stab mit den Abmessungen des Meß-

[14]) Es handelt sich hierbei um ein Meßinstrument, das in der Werkstoffversuchsabteilung der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen, entwickelt wurde. Näheres s. b. A. Dose, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 95.

querschnitts angesehen wird. Man erkennt, daß der Fehler, den man auf diese Weise begeht, recht beträchtlich ist. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der in den Abschnitten 1 bis 8 entwickelten genaueren Rechnung und der Näherungsrechnung des Abschnittes 9 ist für die in den Bildern 12 und 13 angegebenen Spannungszustände so gering, daß er sich in dem gewählten Maßstab nicht darstellen läßt. Für die Lage des Querkraftmittelpunktes ergibt sich jedoch ein etwas größerer Unterschied. Nach der Näherungsrechnung würde für den Meßquerschnitt

$$c \sim -39\frac{\bar{Q}}{Q}\,[\mathrm{mm}]$$

sein, während nach der genaueren Rechnung

$$c = -47\frac{\bar{Q}}{Q} + 8\,[\mathrm{mm}]$$

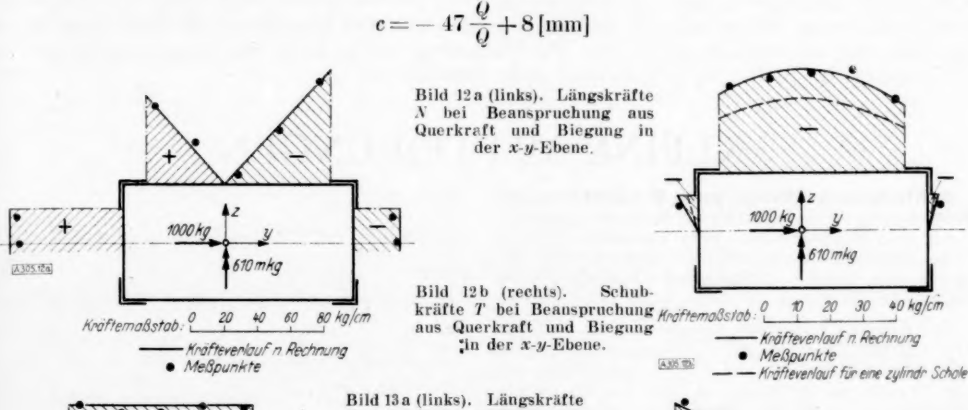


Bild 12a (links). Längskräfte N bei Beanspruchung aus Querkraft und Biegung in der x-y-Ebene.

Bild 12b (rechts). Schubkräfte T bei Beanspruchung aus Querkraft und Biegung in der x-y-Ebene.

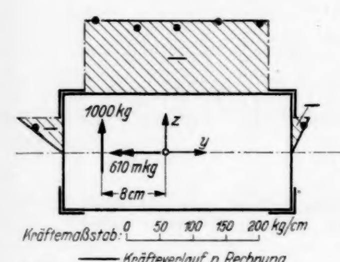
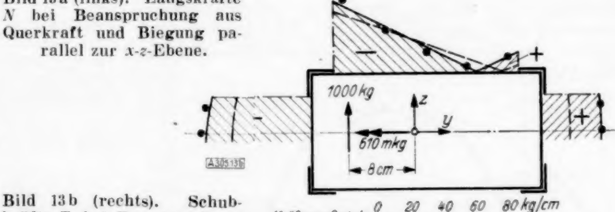


Bild 13a (links). Längskräfte N bei Beanspruchung aus Querkraft und Biegung parallel zur x-z-Ebene.



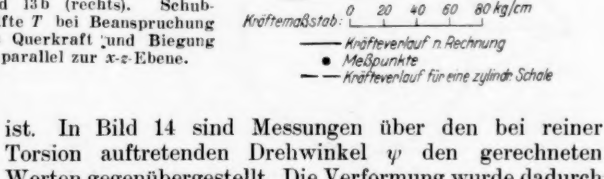


Bild 13b (rechts). Schubkräfte T bei Beanspruchung aus Querkraft und Biegung parallel zur x-z-Ebene.

Bild 14. Drehwinkel bei einem Drehmoment von 500 mkg.

ist. In Bild 14 sind Messungen über den bei reiner Torsion auftretenden Drehwinkel ψ den gerechneten Werten gegenübergestellt. Die Verformung wurde dadurch gemessen, daß an der Schale Maßstäbe befestigt wurden, deren Verschiebung mit Hilfe eines Nivellierinstrumentes beobachtet wurde. Nach der Theorie erhält man für ψ die Gleichung

$$\psi^0 = 1{,}33 - \frac{1{,}05}{x^3}\ (x \text{ in m}).$$

Sie gilt nicht mehr in der Nähe der Einspannstelle im Bereich der dort vorhandenen Verstärkungslaschen. Dieser Bereich wurde zu einem Vergleich zwischen Rechnung und Messung nicht herangezogen. Die Integrationskonstante in der Gleichung für ψ wurde so gewählt, daß an der Rippe bei $x = 1{,}2$ m Versuch und Rechnung übereinstimmen.

11. Zusammenfassung.

Bei der Spannungsberechnung von Stäben, die einen dünnwandigen Hohlquerschnitt mit längs der Stabachse veränderlichen Abmessungen besitzen, ist es im allgemeinen nicht mehr ausreichend genau, wenn man den zu untersuchenden Stab an der gerade betrachteten Stelle durch einen Zylinder annähert. Es wird vielmehr erforderlich, in der Näherung einen Schritt weiter zu gehen, und den Stab durch eine Kegelschale zu ersetzen. Die wichtigsten

Ergebnisse, die in den Abschnitten 1 bis 9 bei Übertragung der Ansätze der technischen Balkenbiegungslehre auf kegelförmige Schalen erhalten wurden und, wie Abschnitt 10 zeigt, durch Dehnungsmessungen an einem Versuchsstück bestätigt werden konnten, sind die folgenden. Die in der Schale in Richtung der Erzeugenden auftretenden Längskräfte können — von kleinen praktisch meist nicht wesentlichen Korrekturgliedern abgesehen — wie bei einem Zylinder berechnet werden. Für die Schubspannungen ergeben sich jedoch erhebliche Änderungen, die in der Hauptsache darin bestehen, daß statt der Querkraft und statt des Drehmomentes eines zylindrischen Stabes andere Größen maßgeblich werden, die sich von den ersteren durch einen vom Biegemoment abhängigen Betrag unterscheiden. Der Drillruhepunkt eines Kegelquerschnittes stimmt im wesentlichen mit dem Drillruhepunkt eines entsprechenden Zylinderquerschnitts überein. Die Lage des Querkraftmittelpunktes ist jedoch von der Belastung abhängig. Drillruhepunkt und Querkraftmittelpunkt fallen lediglich dann zusammen, wenn der betreffende Stabquerschnitt nur durch eine Querkraft, aber nicht durch ein Biegemoment beansprucht wird. Bei Belastung allein durch ein Biegemoment ist die Verformung des Stabes im allgemeinen nicht torsionsfrei. 305

KLEINE MITTEILUNGEN

Fehlerbetrachtung zur Rinaldinischen Regel. Nach der Rinaldinischen Regel kann ein Kreis in beliebig viele näherungsweise gleiche Teile geteilt werden, und im folgenden wird die Größe der hierbei auftretenden Teilwinkelfehler näher untersucht.

Zur Konstruktion eines Sehnen-n-eckes wird der Durchmesser in n gleiche Teile geteilt und von den Schnittpunkten O und P (der Kreisbögen um die Durchmesserendpunkte A und B mit $\overline{AB}$ als Halbmesser) die Strahlen über jeden zweiten Durchmesserteilpunkt gezogen, die dann den Umfang des Kreises in den gesuchten Teilpunkten treffen (Bild 1).

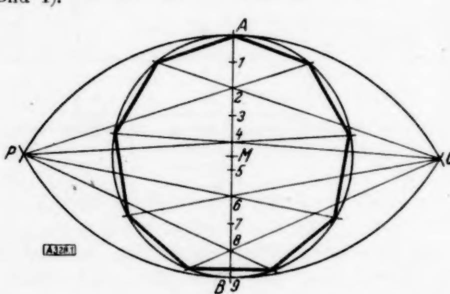


Bild 1.

Bild 2.

Zur Ermittlung des Teilwinkelfehlers kann der Teilwinkel aus den Konstruktionsgrößen bestimmt werden und zwar ist (Bild 2)

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{(b+c)\cdot\sin\beta}{r} \quad (\text{aus } \Delta\, DMP),$$

hierin ist

$$\sin\beta = \frac{f}{b} \qquad (\text{aus } \Delta\, CMP),$$

ferner

$$c = \sqrt{f^2 + r^2 - 2\cdot f r\cdot\cos\alpha} \qquad (\text{aus } \Delta\, CDM)$$

und

$$b = \sqrt{d^2 + e^2 - 2\cdot d\, e\cdot\cos 60^\circ} = \sqrt{d^2 + e^2 - d\, e} \qquad (\text{aus } \Delta\, ACP).$$

Durch Einsetzen und Umstellen erhält man

$$\frac{r}{f}\cos\alpha - 1 = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{f^2 + r^2 - 2\cdot f r\cdot\cos\alpha}{d^2 + e^2 - d\, e}}\,.$$

Setzt man nun für

$$d = 2r$$

$$f = r\left(1 - \frac{4m}{n}\right)$$

$$e = r\,\frac{4m}{n},$$

worin m die Ordnungszahl der Teilung und n die Seitenzahl des Vieleckes ist, so ergibt sich nach Kürzen von r

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \frac{4m}{n}} - 1 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{4m}{n}\right)^2 + 1 - 2\left(1 - \frac{4m}{n}\right)\cos\alpha}{3 + \left(1 - \frac{4m}{n}\right)^2}}\,.$$

Nun führt man die Hilfsgröße

$$z = 1 - \frac{4m}{n}$$

ein und erhält

$$\frac{\cos\alpha}{z} - 1 = \sqrt{\frac{1 + z^2 - 2z\cos\alpha}{3 + z^2}},$$

eine quadratische Gleichung mit der Lösung

$$\cos\alpha = z\,\frac{3 \pm \sqrt{3 - 2z^2}}{3 + z^2},$$

wobei das negative Wurzelvorzeichen für den Schnittpunkt E des Strahles mit dem Kreisumfang gilt, und daher für die Fehlerrechnung nicht berücksichtigt zu werden braucht. Da der Winkel bei fehlerfreier Teilung $\frac{m}{n}\,360^{\circ}$ betragen soll, ergibt sich schließlich

$$\cos\left(\Delta\alpha + \frac{m}{n}\,360^{\circ}\right) = z\,\frac{3+\sqrt{3-2z^2}}{3+z^2}.$$

Wegen der Symmetrie der Konstruktion ist die Fehlerermittlung nur für $0^{\circ} \leq \alpha \leq 90^{\circ}$ erforderlich, d. h. also für $0^{\circ} \leq m \leq \frac{n}{4}$. Die Fehlerwerte sind in Bild 3 zusammengestellt.

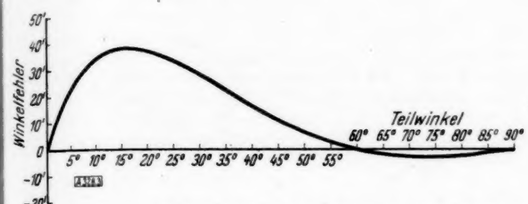


Bild 3. Fehlerschaubild zur Rinaldinischen Regel.

Man ersieht hieraus, daß der Fehler etwa bei 18° am größten ist und rund 38′ beträgt. Bemerkenswert ist der geringe Fehler im Gebiet zwischen 60° und 90°. Für Konstruktionen, bei denen ein Winkelfehler bis zu 3′ zulässig ist, was in der Praxis sehr häufig der Fall sein wird, kann also die Rinaldinische Regel durchaus angewendet werden, wenn man zur Ermittlung der Sehnenlänge nur Teilpunkte im Bereich der kleinen Fehler wählt.

Hamburg. H. Peineke. 328

Über Strömungen von Schäumen. Unter einem Schaum soll im folgenden das innige Gemisch einer Flüssigkeit und eines Gases verstanden werden. Es soll keine merkliche Entmischungstendenz vorhanden sein und kein nennenswerter Übergang der flüssigen Komponente in die gasförmige oder umgekehrt stattfinden. Die Mischung soll so innig sein, daß Volumselemente, deren Abmessungen genügend klein sind gegenüber den Abmessungen der Strömung, noch immer Mischungscharakter besitzen.

Praktische Bedeutung besitzen solche Strömungen vor allem bei Wasserstrahlluftpumpen. Theoretisch sind sie noch wenig behandelt. Ansätze finden sich bei Pfleiderer [1]).

Es sollen zunächst die hydrodynamischen Grundgleichungen der Schaumströmung entwickelt werden, unter der Voraussetzung, daß die flüssige und gasförmige Komponente in jedem Volumselement in demselben Gewichtsverhältnis steht. Greift man ein Volumen V des Schaumes heraus, so sollen V_f und V_g sowie G_f und G_g die Volumsanteile sowie die Gewichtsanteile der flüssigen und gasförmigen Komponente bedeuten. Es ist dann das Mischungsverhältnis:

$$\mu = \frac{G_g}{G_f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Für eine vorliegende Strömung nach Voraussetzung von V unabhängig und konstant. Es sei ferner die gasförmige Komponente ein ideales Gas, die flüssige Komponente sei unzusammendrückbar. Unter diesen Voraussetzungen ist die Zustandsgleichung des Schaumes leicht abzuleiten. Bezieht man die eingeführten Größen G_g, G_f, V_g, V_f auf das Volumselement und sind ϱ_g, ϱ_f und ϱ die Dichten der gasförmigen und der flüssigen Komponente sowie des Schaumes, so gilt:

$$\varrho = \frac{G_f + G_g}{g\,(V_f + V_g)} = \frac{1+\mu}{\dfrac{\mu}{\varrho_g} + \dfrac{1}{\varrho_f}},$$

ferner gilt, wenn p der Druck, R die Gaskonstante und T die absolute Temperatur bedeutet:

$$\frac{p}{\varrho_g} = g \cdot R \cdot T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Daraus folgt:

$$p\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_f\,(1+\mu)}\right] = \frac{\mu \cdot g}{1+\mu} \cdot R \cdot T \quad . \; . \quad (3)$$

als Zustandsgleichung des Schaumes, worin ϱ_f als konstant angesehen werden kann, wenn im Temperaturbereich, der in Frage kommt, die Dichteänderungen der flüssigen Komponente belanglos sind.

Setzt man vollkommene Konvektion voraus, so daß die flüssige und gasförmige Komponente an jeder Stelle der Strömung eine einheitliche Geschwindigkeit besitzen, so gelten, wenn man von Reibungsverlusten absieht und wenn die äußeren Kräfte ein Potential U besitzen, die Eulerschen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung wie bei der Strömung des Kontinuums. Es gilt also, in vektorieller Form geschrieben [2]):

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{w} \,|\, (V, \overline{w}) + \frac{1}{\varrho}\, V\, p + V\, U = 0 \quad . \; . \quad (4),$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \,|\, (\varrho\, \overline{w}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a),$$

wobei $\overline{w}$ den Geschwindigkeitsvektor der Schaumströmung bedeutet.

Um den ersten Hauptsatz $\mathrm{d}\,q = \mathrm{d}\,u + A p\,\mathrm{d}\,v$ einzuführen, muß noch der Ausdruck für die innere Energie $\mathrm{d}\,u$ gefunden werden. Es ist $\mathrm{d}\,u$, bezogen auf die Gewichtseinheit des Schaumes:

$$\mathrm{d}\,u = \left(c_v\,\frac{G_g}{G_g + G_f} + c_f\,\frac{G_f}{G_g + G_f}\right)\mathrm{d}\,T,$$

wenn c_v die spezifische Wärme der gasförmigen Komponente bei konstantem Volumen und c_f die spezifische Wärme der flüssigen Komponente bezeichnen. Nach (1) ist also:

$$\mathrm{d}\,u = \left(c_v\,\frac{\mu}{1+\mu} + c_f\,\frac{1}{1+\mu}\right)\mathrm{d}\,T$$

und damit der erste Hauptsatz:

$$\mathrm{d}\,q = \left(c_v\,\frac{\mu}{1+\mu} + c_f\,\frac{1}{1+\mu}\right)\mathrm{d}\,T - \frac{A\,p}{g\,\varrho^2} \cdot \mathrm{d}\,\varrho \quad (5),$$

wobei die Beziehung $v = \frac{1}{\varrho\, g}$ zu beachten ist.

Um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, fehlt noch eine Gleichung, die den Wärmetransport festlegt. Es wird für praktische Zwecke hinreichen, wenn man den Wärmeübergang ganz

[1]) Pfleiderer: Zur Berechnung der Wasserstrahlluftpumpe. Z. VDI Bd. 58 (1914) S. 956 u. S. 1011.

[2]) Es bedeutet $\overline{a}|\overline{b}$ das Innenprodukt, $\overline{a} \times \overline{b}$ das Vektorprodukt und $\overline{a}, \overline{b}$ das dyadische Produkt.

vernachlässigt. Man erhält dann eine adiabatische Zustandsänderung, die durch $dq = 0$ bestimmt ist. Führt man dies in (5) ein, so erhält man, bei Benutzung von (3), die Differentialgleichung der Adiabate:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu c_p + c_f}{\mu c_v + c_f} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho\left[1 - \frac{\varrho}{\varrho_f(1+\mu)}\right]} \quad . \; . \; . \; (6),$$

wobei von der bekannten Beziehung $c_p = A \cdot R - c_v$ Gebrauch gemacht wurde. Die Integration von (6) liefert die Adiabatengleichung des Schaumes:

$$p\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_f(1+\mu)}\right]^{\frac{\mu c_p + c_f}{\mu c_v + c_f}} = \text{const} \quad . \; . \; . \; (7).$$

Für die beiden Grenzfälle $\mu = 0$ (reine Flüssigkeit) und $\mu = \infty$ (reines Gas) erhält man hieraus die bekannten Beziehungen $\varrho = \varrho_f = \text{const}$ und $\frac{p}{\varrho^\varkappa} = \text{const}$, wenn $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ bedeutet. Die Gleichungen (4), (4a) und (7) reichen zur eindeutigen Beschreibung der Strömung hin, falls die nötigen Randwerte festliegen.

Wesentlich für die Beurteilung des Strömungscharakters ist die Frage, ob sich die Strömung im unterkritischen oder überkritischen Bereich befindet. Die Grenze zwischen beiden Bereichen liegt bekanntlich dort, wo die Strömungsgeschwindigkeit w mit der Schallgeschwindigkeit übereinstimmt. Diese ist nach einer bekannten Beziehung gegeben durch $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$. Berechnet man $\frac{dp}{d\varrho}$ aus (6), so ergibt sich in Verbindung mit (2):

$$a^2 = \frac{p^2\left(\frac{1}{\varrho_f} + \frac{\mu g R T}{p}\right)^2 (\mu c_p + c_f)}{\mu(1+\mu)(\mu c_v + c_f) \cdot g R T} \quad . \; . \; . \; (8),$$

woraus man entnehmen kann, daß die Schallgeschwindigkeit des Schaumes im Gegensatz zu der des idealen Gases druckabhängig ist.

Führt man als dimensionslose Variable:

$$P = \frac{p}{\varrho_f \cdot g R T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

ein, so erhält man aus (8):

$$\frac{a}{\sqrt{\varkappa g R T}} = (P + \mu)\sqrt{\frac{\mu + \frac{\varkappa}{\nu}}{\mu(1+\mu)(\mu+\nu)}} \quad . \; (10),$$

wobei:

$$\nu = \frac{c_f}{c_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

bedeutet.

Für den Grenzfall der reinen Flüssigkeit ($\mu = 0$) wird $a = \infty$, da die Flüssigkeit als unzusammendrückbar vorausgesetzt wurde. Für den Grenzfall des reinen Gases ($\mu = \infty$) erhält man die bekannte Gleichung $a = \sqrt{\varkappa g R T}$. Aus (10) ergibt sich aber die bemerkenswerte Tatsache, daß für gewisse Bereiche des Mischungsverhältnisses μ die Schallgeschwindigkeit des Schaumes wesentlich kleiner werden kann als die der gasförmigen Komponente bei gleicher Temperatur.

Faßt man nach (10) a bei konstantem P und T als Funktion von μ auf, so besitzt a für einen bestimmten Wert $\bar{\mu}$ ein Minimum. Für $\bar{\mu}$ folgt aus (10) die Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\mu}^3[\varkappa(1+\nu) - \nu - 2\varkappa P] \\ &+ \bar{\mu}^2[2\varkappa\nu - \varkappa P(1+\nu) - 3\nu P] \\ &+ \bar{\mu}\;[\nu^2 - 2\nu(1+\nu)P] - \nu^2 \cdot P = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; (12).$$

Aus (9) und (2) folgt ferner:

$$P = \frac{\varrho_g}{\varrho_f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9a),$$

woraus man ersieht, daß man $P \ll 1$ voraussetzen darf. Da $\varkappa$ und ν von der Größenordnung eins sind, kann man statt (12) angenähert schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\mu}^3 + \frac{2\varkappa\nu}{\varkappa(1+\nu) - \nu}\,\bar{\mu}^2 + \frac{\nu^2}{\varkappa(1+\nu) - \nu} \\ &\bar{\mu} - \frac{\nu^2}{\varkappa(1+\nu) - \nu} \cdot P = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12a).$$

Um von der Größenordnung der Koeffizienten ein Bild zu bekommen, sollen die Werte für Wasser und Luft eingesetzt werden ($\nu = 5{,}8$, $\varkappa = 1{,}4$):

$$\bar{\mu}^3 + 4{,}35\,\bar{\mu}^2 + 8{,}76\,\bar{\mu} = 8{,}76\,P.$$

Da $P \ll 1$ ist, existiert nur eine positive Wurzel, die sich näherungsweise zu:

$$\bar{\mu} = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

ergibt. Daraus folgt für $a_{\min}$:

$$\frac{a_{\min}}{\sqrt{\varkappa g R T}} = 2P\sqrt{\frac{P + \frac{\nu}{\varkappa}}{P(1+P)(P+\nu)}} \quad . \; . \; (10a)$$

oder näherungsweise:

$$\frac{a_{\min}}{\sqrt{\varkappa g R T}} = 2\sqrt{\frac{P}{\varkappa}} \quad . \; . \; . \; . \; (10b).$$

Man sieht aus (10b), daß $a_{\min}$ nur einen kleinen Bruchteil der Schallgeschwindigkeit der gasförmigen Komponente beträgt.

Um die Bedingung (13) anschaulich zu deuten, ersetzt man sie nach (1) und (9a) durch:

$$\frac{G_g}{G_f} = \frac{\varrho_g}{\varrho_f},$$

daraus folgt: $V_g = V_f$. Die Schallgeschwindigkeit des Schaumes ist also dort ein Minimum, wo die flüssige und gasförmige Komponente je das halbe Volumen eines Elementes einnehmen.

Wien. G. Heinrich. 341

BUCHBESPRECHUNGEN

L. **CESARI**, F. **CONFORTO** und C. **MINELLI**, Travi Continue Inflesse e Sollecitate Assialmente. Mit einem Vorwort von A. Fiore. (Publicazioni Dell'Istituto Per Le Applicazioni Del Calcolo, Consiglio Nazionale Delle Ricerche Roma 1941/XIX, N. 91.) VIII + 244 S. Rom 1941. Preis geb. 65 Lire.

Die Dreimomentengleichungen von G. Albenga — die bekannten Verallgemeinerungen der Clapeyronschen — für durchlaufende Balken, die in der Querrichtung auf Biegung und gleichzeitig in der Längsrichtung auf Zug oder Druck (P) beansprucht werden, bilden die Grundlage für die Berechnung der Flugzeugholme für diagonal verspannte Doppeldecker; dabei genügt es in den meisten Fällen, die Trägheitsmomente (J) der Holmquerschnitte für die einzelnen Felder konstant anzunehmen. Schon bei Eindeckern führt jedoch die elementare Bedingung gleicher Biegesteifheit auf eine Veränderlichkeit der Holmhöhe und damit von J. Obwohl diese Konstruktionen ihre vormalige Bedeutung in weitem Maße verloren haben, werden diese Gleichungen immer ihre Bedeutung behalten. Die Verfasser geben in der vorliegenden Darstellung eine übersichtliche und durch Zahlen- und Kurventafeln ergänzte Darstellung des mit diesen Gleichungen verbundenen Aufgabenkreises. Die in den Dreimomentengleichungen von G. Albenga auftretenden Konstanten hängen unter den angegebenen Bedingungen von zwei Parametern ab, nämlich von $\alpha = (J_{max} - J_{min})/J_{min}$ und $\mu = Pl^2/EJ_{min}$, so daß die Zahlentafeln einen doppelten Eingang erhalten. — Zum Schlusse wird ausführlich die vollständige analytische Lösung des Problems mit linear veränderlichem Trägheitsmoment gegeben, die durch Besselsche Funktionen geleistet wird.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 353

Dr. H. **HAPPEL**, o. Prof. a. d. Technischen Hochschule Breslau, Das Dreikörperproblem. Vorlesungen über Himmelsmechanik. XI + 526 S. m. 17 Fig. Leipzig 1941. K. F. Koehler Verlag. Preis geb. 30 M.

Es ist auch vom Standpunkt des angewandten Mathematikers aus sehr zu begrüßen, daß ein Buch erscheint, das den Studierenden in die Probleme der Himmelsmechanik und insbesondere in das Dreikörperproblem einführen will. Bekommt doch dadurch die allgemeine Mechanik den altklassischen Abschluß und kann auch der Nichtastronom daraus für andere Zwecke die Integrationsmethoden kennen lernen, die die Astronomen im Laufe einer langen Entwicklung ausgebildet haben. So kann von diesem Buche eine allgemeine, über das besondere Fachgebiet hinausgehende Befruchtung der Integrationstheorie der Bewegungsgleichungen der Mechanik ausgehen. Aus diesem Grunde ist es sehr erfreulich, daß das Buch die Grundlagen der klassischen Mechanik, Lagrangesche Gleichungen, kanonische Gleichungen und ihre Transformationstheorie in den beiden ersten Kapiteln von Anfang an entwickelt. Das dritte Kapitel beginnt dann das Hauptthema mit dem Zweikörperproblem, im vierten Kapitel werden die Delaunayschen und Poincaréschen Koordinaten für die gestörten Bahnelemente eingeführt, im fünften Kapitel die Störungen der Planeten behandelt. Das sechste und siebente Kapitel über den Mond enthält eigene Untersuchungen des Verf. Im Kapitel VIII folgen die periodischen Lösungen nach Methoden von Poincaré, Wilkens und E. Hopf, in Kapitel IX Poincarés Theorie der charakteristischen Exponenten. Kapitel X behandelt weitere Fälle, in denen eine strenge oder angenäherte Integration möglich ist, auch die Frage der Kommensurabilitäten. Das letzte Kapitel geht noch kurz auf die Regularisierung nach Thiele, Levi-Cività und Sundmann ein. Benutzt wird dabei die Birkhoffsche Darstellung. Ein abschließendes Urteil über dieses sicher reichhaltige und anregende Buch muß dem Astronomen von Fach vorbehalten bleiben.

Berlin. Hamel. 347

LEIF **JOHNSEN**, Dynamique Générale des systèmes non-holonomes. Schriften, herausgegeben von der norwegischen Akademie der Wissenschaften in Oslo, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1941, Nr. 4. Oslo 1941, Verlag in Kommission Hos Jacob Dybwad. 75 S. Preis 6,— Kr.

Es ist zu begrüßen, daß der Verf. seine wertvollen Untersuchungen über nichtholonome Systeme in umfassenderer Form herausgegeben hat. Im ersten Kapitel bespricht er neben der allgemeinen Einführung die Methoden des Ref., ferner diejenigen von Woronetz, Appell und Schieldrop. Es werden gleich von vornherein auch nichtlineare Bedingungen zugelassen. Wenn Ref. hier gleich eine kritische Bemerkung machen darf, so die, daß die Methode von ihm und die von Woronetz beide in einer ganz allgemeinen enthalten sind, die Ref. in den Math. Ann. Bd. 59 dargestellt hat. Offenbar kennt Verf. diese Arbeit nicht, denn sonst wäre ihm nicht der grundlegende Fehler unterlaufen, von dem noch die Rede sein wird. In Kap. II setzt er sich mit berechtigter Kritik mit den Ausführungen von Delassus, Beghin und Appell über die Realisierung seiner Systeme auseinander. Beachtenswert erscheint der Gesichtspunkt, daß gefundene Integrale der Bewegungsgleichungen als i. a. nichtholonome Bedingungen eingeführt und so von vornherein berücksichtigt werden können. In Kapitel III und IV setzt nun Verf. seine Methode auseinander und leitet die Bewegungsgleichungen ab. Kapitel V handelt von der durch Herrn Schieldrop eingeführten déviation non-holonome, das letzte Kapitel gibt noch zugehörige geometrische Betrachtungen, wobei Riemannsche Räume, die längs der Bahn in Übereinstimmung sind, zur Deutung des Hamiltonschen Prinzips eingeführt werden. (L'espace de Riemann de raccordement le long de la trajectoire.)

Nun muß aber leider gesagt werden, daß die Methode des Verf., durch die er die älteren Untersuchungen, auch eigene vereinfachen will, verfehlt ist. Dasselbe gilt für die Darstellung in der älteren Arbeit aus den Abh. der Osloer Akademie 1937, Nr. 11. Verf. möchte die Einführung von scheinbar überflüssigen Geschwindigkeitsparametern $\dot{\omega}$, die durch ihr Verschwinden die nichtholonomen Bedingungen darstellen, vermeiden, und führt deshalb von vornherein nur $h < n$ solche Parameter ein, die bei Beachtung der Bedingungen freibleiben. Er beachtet aber nicht, daß er bei der Annahme $d\,\delta\,q - \delta\,d\,q = 0$, die er Seite 38 unten und 39 oben über die wirklichen Koordinaten trifft, die $\delta\,\dot{\omega}$ für diejenigen $\dot{\omega}$, die selbst vermöge der Bedingungen verschwinden, nicht null setzen darf, was er aber implizite tut, da sie bei ihm gar nicht vorkommen. Anders ausgedrückt: Verf. möchte sowohl die virtuellen Verschiebungen als auch die Nachbarbahnen möglich haben, was bekanntlich ausgeschlossen ist. Die Folge ist, daß seine Gleichungen 14 auf Seite 39 widerspruchsvoll sind, es sind n Gleichungen für $h < n$ Unbekannte. Wenn scheinbar die Auflösung dieser Gleichungen gelingt, so liegt das daran, daß er sie mit nicht bestimmten Größen multipliziert, so daß das Ergeb-

nis 15 unbestimmt ist. Wenn das Hauptergebnis auf Seite 44 wenigstens richtig gedeutet werden kann, indem man hinzufügt, daß in T von den nichtholonomen Bedingungen kein Gebrauch gemacht werden darf, was man aber hineindeuten muß, da es aus der Ableitung nicht folgt, so liegt das daran, daß rein formal gesehen, gewissermaßen bei Außerachtlassung der Zahl h, die Rechnung in der Tat, wenn sie nämlich Sinn bekommen soll, so geführt wird, als wären doch n und nicht nur h Größen $\overset{*}{\omega}$ da. Leider ist also die Ableitung der Gleichungen, die man dem Verf. verdankt, in dieser Darstellung und der genannten früheren unhaltbar. Wenn Verf. mit seiner Methode durchkommen will, muß er auf die Übergangsgleichungen $d\,\delta q - \delta\, d q = 0$ und damit auch auf die Lagrangesche Zentralgleichung verzichten und die verallgemeinerte Zentralgleichung aus den Annalen 59 benutzen.

Berlin. Hamel. 348

Dr. F. LOONSTRA, Analytische Untersuchungen über bewertete Körper. 101 S. Amsterdam 1941, N. V. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij.

Als eine Verallgemeinerung des Rechnens mit absoluten Beträgen von komplexen Zahlen, wie es jedem Mathematiker geläufig ist, wurde durch Kürschak für beliebige abstrakte Körper der Begriff der Bewertung eingeführt (J. reine angew. Math., Bd. 142 [1913]). Dieser Begriff hat seitdem zu verschiedenen umfangreichen teils algebraischen, teils analytischen Untersuchungen Veranlassung gegeben, die auf mehrere Zeitschriften verstreut sind. Eine zusammenfassende Darstellung in einer Monographie, wie sie hier, und zwar unter Bevorzugung der analytischen und Zurückstellung der rein algebraischen Betrachtungen gegeben wird, dürfte daher den Freunden und Bearbeitern dieses Gebietes willkommen sein.

Halle. H. Brandt. 352

NACHRICHTEN

Professor Matschoß †.

Am 21. März dieses Jahres verstarb nach kurzer Krankheit im 71. Lebensjahr Prof. Dr.-Ing. eh., Dr. phil. h. c. Conrad Matschoß, langjähriger Direktor des Vereins deutscher Ingenieure und Prof. für Geschichte der Technik an der Techn. Hochschule Berlin. Prof. Matschoß ist weiten Kreisen durch seine zahlreichen Arbeiten zur Technik- und Industriegeschichte bekannt geworden, von denen nur das zweibändige Werk „Entwicklung der Dampfmaschine“ (1908) und der Band „Männer der Technik“ (1925) genannt seien. Zur Förderung der Studien und zur Zusammenfassung der Arbeit auf diesem Gebiet gründete er 1909 die „Beiträge zur Geschichte der Technik und Industrie“, die seit 1939 unter dem Titel „Technikgeschichte“ erscheinen.

Als Direktor des Vereins deutscher Ingenieure galt seine Sorge unter anderem der Nachwuchsfrage. Er war Mitbegründer und später Vorsitzender des Ausschusses für technisches Schulwesen und war ferner an der Gründung der Bewegung „Forschung tut not“ führend beteiligt. Der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, deren erster Band 1921 im VDI-Verlag erschien, als Matschoß Direktor des Vereines deutscher Ingenieure war, brachte er stets wohlwollendes und verständnisvolles Interesse entgegen.

Dresden. Willers. 362

Prof. Dr. Jean Peters gestorben.

Am 24. Aug. 1941 starb Prof. Dr. Jean Peters, Observator am Coppernicus-Institut in Berlin-Dahlem. Prof. Peters ist in weiteren Kreisen durch seine Tafelwerke bekannt geworden. Am 25. August 1869 in Köln am Rhein geboren, studierte er in Bonn Mathematik und Astronomie. Seit 1899 gehörte er zum Astronomischen Recheninstitut in Berlin. Hier hat er hauptsächlich die Jahresbände des Berliner Astronomischen Jahrbuches bearbeitet. Auch der Preußische Grundkalender und das Nautische Jahrbuch sind von ihm alljährlich vorbereitet worden. Neben umfänglichen Tafeln für rein astronomische Aufgaben (Koordinatentransformation, Keplerbewegung) hat Peters eine große Zahl Tafeln, vor allem der Kreisfunktionen, ihrer Logarithmen, sowie der Logarithmen der natürlichen Zahlen berechnet und herausgegeben. Das erste dieser Tafelwerke war (zusammen mit J. Bauschinger) eine achtstellige Tafel der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen (Leipzig 1910/11, Engelmann). Hier wird im Vorwort die Berechnung und Herstellung der Tafeln eingehend beschrieben. Später folgten Tafeln der verschiedensten Stellenzahlen für die logarithmische und die maschinelle Rechnung, für die Sexagesimaleinteilung, für die Stundenteilung, für die Dezimalteilung des Grades, in der letzten Zeit auch für die Neugradteilung. Neben einer Tafel für das logarithmische und numerische Rechnen mit drei Stellen (Berlin 1913, Stankiewicz) steht eine Tafel der zweiundfünfzigstelligen Logarithmen (Berlin 1919. Astr. Recheninstitut). Dazwischen brachte er Tafeln mit 5, 6, 7, 8, 10 und 21 Stellen heraus. Mir sind insgesamt vierzehn Peterssche Tafeln für das Rechnen mit Logarithmen und Kreisfunktionen bekannt geworden. Dazu kommen mehrere Multiplikationstafeln (1924, 1930), sowie eine Faktortafel aller Zahlen bis 100 000 (1935).

J. Peters war ein sicherer, rascher und ausdauernder Rechner. Er war groß im Organisieren von umfänglichen Rechenarbeiten. Seine Methoden, Rechen- und Druckfehler zu vermeiden, waren sehr gut durchdacht. Leider ist, über einen kleinen Kreis engster Mitarbeiter hinaus, davon kaum etwas bekannt geworden. Im Satzbild — auch das ist ein wichtiger Punkt, wenn es sich darum handelt, große Zahlenmengen zu verarbeiten — sind die Petersschen Tafeln vorbildlich.

Die Mehrzahl der Petersschen Tafeln ist auf die Bedürfnisse der rechnenden Astronomie und Geodäsie zugeschnitten. Gelegentlich haben aber auch technische Probleme den Anstoß zur Berechnung der Tafeln gegeben. Längst nicht alle von Peters berechneten Tafeln konnten bisher der Öffentlichkeit übergeben werden. So konnte z. B. eine achtstellige Reziprokentafel leider noch immer nicht gedruckt werden.

Berlin. Klose. 358

Preisausschreiben der Lilienthal-Gesellschaft.

Wie in den vorhergehenden Jahren schreibt auch in diesem Jahre die Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung eine Reihe von Preisaufgaben aus. Die Themen sind den Gebieten der Aerodynamik, der Flugzeugstatik, des Flugmotorenbaues (2 Themen), des Funkwesens und der Ausrüstung (3 Themen) und des Waffenwesens entnommen. Da im letzten Jahre trotz des Krieges eine überraschend große Zahl guter Arbeiten eingegangen ist, ist, um alle preiswürdigen Arbeiten auszeichnen zu können, in einzelnen Fällen die Zahl der Preise erhöht. Auch dieses Preisausschreiben dient dem großen Ziel: Verbesserung aller technischen Mittel der Luftwaffe.

Themen und Bedingungen teilt das „Generalsekretariat der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Berlin SW 11, Prinz-Albrecht-Str. 5“ mit. 372

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.